

Table des matières

Chapitre 1. Dimension	1
1 Deux définitions	1
1.1 Définition par chaînes d'idéaux premiers	1
1.2 Dimension des algèbres affines	2
1.3 Système de paramètres	4
2 Le polynôme de Hilbert-Samuel	4
2.1 Définition de la fonction caractéristique	4
2.2 Un exemple	6
2.3 Polynômes à valeurs entières	7
2.4 Le polynôme de Hilbert-Samuel	8
2.5 Démonstration du théorème d'existence	10
2.6 Dimension et suite exactes	10
3 L'égalité des trois dimensions	12
4 Le théorème de l'idéal principal	14
5 Dimension d'une intersection de variétés algébriques	16
Chapitre 2. Multiplicité d'un anneau local	21
1 Définition de la multiplicité	22
2 Calcul de la multiplicité	23
3 Quelques indications sur la multiplicité d'intersection	25
Chapitre 3. Espace et cône tangents	27
1 Espace et cône tangents	27
1.1 Espace tangent	27
1.2 Cône tangent	27
1.3 Quelques propriétés de transfert	30
1.4 Anneaux réguliers	31
1.5 Plongement d'un anneau local	33
2 Anneaux réguliers de dimension ≤ 1	33
2.1 Les anneaux locaux réguliers de dimension 1	34
2.2 Les anneaux globaux réguliers intègres de dimension ≤ 1	36
Chapitre 4. Chaînes d'idéaux premiers	41
1 Chaînes d'idéaux premiers	41
1.1 Définitions et exemples	41
1.2 Descente	43
2 Dimension et homomorphisme	43
3 Anneaux universellement caténaux	45
4 Un exemple d'anneau caténaire non universellement caténaire	47

Chapitre 5. Anneaux de Cohen-Macaulay	49
1 Définitions et premières propriétés	49
1.1 Anneaux de Cohen-Macaulay	49
1.2 Localisation	51
2 La profondeur	51
2.1 Suites régulières	51
2.2 Permutabilité d'une suite régulière	52
2.3 Profondeur	53
2.4 Profondeur et changement d'anneaux	55
3 Caractérisation des anneaux de Cohen-Macaulay	57
4 Quelques exemples	60
4.1 Dimensions 0, 1, 2	60
4.2 Polynômes et séries formelles	61
4.3 Intersections complètes	62
5 Autres caractérisations	62
Chapitre 6. Étude homologique des anneaux réguliers	67
1 Le théorème des syzygies de Hilbert	67
2 La dimension homologique	70
2.1 Caractérisation de la dimension homologique par les foncteurs Ext	70
2.2 Caractérisation de la dimension homologique par les foncteurs Tor	73
3 Complexe de Koszul et résolution projective	76
3.1 Le complexe de Koszul	76
3.2 Produit tensoriel de complexes	77
3.3 L'homologie du complexe de Koszul	79
4 Dimension homologique et régularité	81
4.1 Dimension homologique et dimension d'immersion	81
4.2 Série de Betti d'un anneau local régulier	82
4.3 L'analogie du théorème des syzygies	83
4.4 Dimension projective et profondeur	84
5 Factorialité des anneaux locaux réguliers	86
6 Anneaux globaux réguliers	88
7 Un invariant	89
8 Calcul effectif de résolutions projectives	90
Chapitre 7. Réduction et normalité	95
1 Anneaux normaux	95
2 Anneaux de Krull	96
3 Anneaux noethériens réduits	97
4 Montée et descente	99
5 Quelques compléments	100
Chapitre 8. Anneaux de Gorenstein	103
1 Première définition des anneaux de Gorenstein	104
1.1 Anneaux de Gorenstein de dimension 0	104
1.2 Anneaux de Gorenstein de dimension quelconque	106
2 Définition par finitude de la dimension injective	108
3 Caractérisation par idéaux engendrés par des paramètres	112
4 Anneaux locaux de Gorenstein de dimension 1	115

Chapitre 9. Anneaux locaux complets	119
1 Rappels et énoncés des résultats	119
2 Les sous-anneaux de Cohen d'un anneau local complet	121
2.1 Le cas d'égalité caractéristique nulle	122
2.2 Le cas d'égalité caractéristique non nulle de corps résiduel parfait	123
2.3 Cas général de caractéristique résiduelle non nulle	123
3 Les théorèmes de structure des anneaux locaux complets	127
3.1 Cas général	127
3.2 Anneaux locaux réguliers complets	128
Chapitre 10. Lissité formelle	131
1 Préliminaires	131
1.1 L'exemple d'un anneau local complet	131
1.2 Définition de la lissité	132
2 Lissité formelle et extensions	134
2.1 Extensions infinitésimales	134
2.2 Interprétation cohomologique	136
2.3 Un complexe de cochaînes	138
3 Application à la régularité	140
4 Lissité formelle relative	142
Chapitre 11. Le lieu singulier	147
1 Le critère jacobien	147
2 Anneaux géométriquement réguliers	151
3 Une autre preuve de la fermeture du lieu singulier	154
4 Le critère jacobien de Nagata	158
5 Étude du cas d'un anneau local complet	162
Chapitre 12. Anneaux locaux henséliens	163
1 Un peu d'histoire	163
2 Quelques exemples d'anneaux locaux henséliens	165
2.1 Les algèbres différentiables	165
2.2 Autres exemples	166
2.3 Un exemple d'anneau local non hensélien	167
3 L'équivalence de différentes définitions	168
3.1 Le théorème principal	168
3.2 Anneaux décomposés	170
3.3 Le lemme de Hensel et la définition d'Azumaya	172
3.4 Quelques préliminaires	172
3.5 Fonction implicite et décomposition	175
3.6 Algèbres étales	177
Chapitre 13. Hensélisé	183
1 Les algèbres locales étales	183
2 L'hensélisé limite inductive d'algèbres étales	184
3 Le foncteur hensélisation	186
4 Propriétés de l'hensélisé	187
4.1 Hensélisé d'un quotient	187

4.2 Hensélisé d'un anneau local noethérien	187
4.3 Hensélisé d'un anneau local réduit ou intégralement clos	188
5 Hensélisé d'un anneau intégralement clos	190
Chapitre 14. De l'algébrique à l'analytique ou au formel	197
1 Anneaux japonais	198
2 Non ramification analytique	200
3 Le passage de l'analytique au formel	202
4 Stabilité par passage aux algèbres de type fini	203
5 Irréductibilité et normalité analytique	207
Chapitre 15. Anneaux excellents	209
1 Les fibres formelles	209
1.1 Les P -homomorphismes	209
1.2 Les G -anneaux	211
2 Stabilité par passage aux algèbres de type fini	213
3 Le complété d'un G -anneau	216
4 Anneaux excellents	217
5 Approximation de M. Artin	219
Chapitre 16. Éléments de théorie de la dualité	221
1 Modules injectifs et dualité de Matlis	221
1.1 Les modules injectifs indécomposables	221
1.2 La dualité de Matlis	226
2 Cohomologie locale	227
2.1 Les foncteurs de cohomologie locale	228
2.2 Interprétation au moyen du complexe de Koszul	229
2.3 Une caractérisation de la profondeur et de la dimension	234
2.4 Dualité locale	236
2.5 Une caractérisation des anneaux de Cohen-Macaulay	237
2.6 Une caractérisation des anneaux locaux de Gorenstein	238
Appendice. Le théorème de préparation	241
Exercices	247