
Inhaltsverzeichnis

Vorwort	VII
Vorwort des Übersetzers	IX
Danksagungen	XI
Einleitung	1
1 Die logarithmische Wiege	7
1.1 Ein mathematischer Albtraum – und ein Erwachen	7
1.2 Des Barons wunderbarer Kanon	10
1.3 Ein Hauch Kepler	20
1.4 Ein Hauch Euler	22
1.5 Weitere Ideen Napiers	26
2 Die harmonische Reihe	31
2.1 Das Prinzip	31
2.2 Eine erzeugende Funktion für H_n	32
2.3 Drei überraschende Ergebnisse	33
3 Subharmonische Reihen	37
3.1 Ein gemächlicher Start	37
3.2 Harmonische Primzahlreihen	38
3.3 Die Kempnerreihe	42
3.4 Die Madelungschen Konstanten	44
4 Zeta-Funktionen	49
4.1 Mit einer positiven ganzen Zahl n	49
4.2 Mit einer reellen Zahl x	55
4.3 Zwei abschließende Resultate	56

5	Der Geburtsort von Gamma	59
5.1	Ankunft	59
5.2	Niederkunft	62
6	Die Gamma-Funktion	65
6.1	Exotische Definitionen	65
6.2	... weitere sinnvolle Definitionen	69
6.3	Gamma trifft Gamma	69
6.4	Komplement und Schönheit	71
7	Eulers wunderbare Identität	73
7.1	Die Formel, auf die es ankommt	73
7.2	... und ein Hinweis auf ihre Nützlichkeit	74
8	Ein erfülltes Versprechen	79
9	Was ist Gamma ... exakt?	83
9.1	Gamma existiert	83
9.2	Gamma ist ... was für eine Zahl?	87
9.3	Eine überraschend gute Verbesserung	89
9.4	Der Ursprung einer großen Idee	93
10	Gamma als Dezimalbruch	95
10.1	Die Bernoullischen Zahlen	95
10.2	Die Euler–Maclaurinsche Summenformel	100
10.3	Zwei Beispiele	101
10.4	Die Implikationen für Gamma	103
11	Gamma als rationaler Bruch	107
11.1	Ein Rätsel	107
11.2	Ein Problem	107
11.3	Eine Antwort	109
11.4	Drei Ergebnisse	111
11.5	Irrationale Zahlen	112
11.6	Lösungen der Pellischen Gleichung	114
11.7	Lückenfüller	115
11.8	Die harmonische Alternative	116
12	Wo ist Gamma?	119
12.1	Nochmals zur alternierenden harmonischen Reihe	119
12.2	In der Analysis	123
12.3	In der Zahlentheorie	130
12.4	Bei Vermutungen	135
12.5	Bei Verallgemeinerungen	136

13 Die Welt ist harmonisch	139
13.1 Mittelwerte	139
13.2 Geometrische Harmonie	142
13.3 Musikalische Harmonie	143
13.4 Rekorde und Aufzeichnungen	146
13.5 Zerstörungsprüfungen	147
13.6 Durchqueren der Wüste	148
13.7 Kartenmischen	149
13.8 Quicksort	150
13.9 Sammeln einer vollständigen Menge	152
13.10 Eine Putnam-Preis-Frage	154
13.11 Maximal möglicher Überhang	155
13.12 Wurm auf einem Band	156
13.13 Optimale Auswahl	156
14 Die Welt ist logarithmisch	163
14.1 Ein Maß für die Unsicherheit	163
14.2 Das Benfordsche Gesetz	170
14.3 Kettenbruchverhalten	181
15 Probleme mit Primzahlen	189
15.1 Einige schwierige Fragen zu Primzahlen	189
15.2 Ein bescheidener Start	190
15.3 Eine Art Antwort	194
15.4 Veranschauliche das Problem!	196
15.5 Das Sieb des Eratosthenes	198
15.6 Heuristik	200
15.7 Ein Brief	202
15.8 Die harmonische Approximation	206
15.9 Verschieden – und doch gleich	209
15.10 Es sind wirklich nur zwei Fragen und nicht drei	210
15.11 Tschebyschew ist mit guten Einfällen zur Stelle	211
15.12 Riemann tritt ein, Beweise folgen	215
16 Die Riemannsche Initiative	219
16.1 Zählen der Primzahlen mit Riemann	219
16.2 Ein neues mathematisches Werkzeug	221
16.3 Analytische Fortsetzung	222
16.4 Riemanns Verallgemeinerung der Zeta-Funktion	223
16.5 Eine Funktionalgleichung für Zeta	223
16.6 Die Nullstellen von Zeta	224
16.7 Die Berechnung von $\Pi(x)$ und $\pi(x)$	226
16.8 Irreführende Spuren	228
16.9 Von Mangoldts explizite Formel und der Primzahlsatz	231
16.10 Die Riemannsche Vermutung	234

16.11	Warum ist die Riemannsche Vermutung wichtig?	236
16.12	Reelle Alternativen	237
16.13	Ein indirekter Weg zur Unsterblichkeit – teilweise verschlossen	239
16.14	Ansporn – damals und heute	242
16.15	Fortschritte	245
A	Das griechische Alphabet	251
B	Die Größenordnung von Funktionen	253
C	Taylorreihen	255
C.1	Grad 1	255
C.2	Grad 2	255
C.3	Beispiele	257
C.4	Konvergenz	257
D	Funktionentheorie	259
D.1	Komplexe Differentialrechnung	259
D.2	Die Weierstraßsche Funktion	264
D.3	Komplexe Logarithmen	266
D.4	Komplexe Integration	267
D.5	Eine nützliche Ungleichung	269
D.6	Das unbestimmte Integral	270
D.7	Ein folgenreiches Ergebnis	272
D.8	Eine erstaunliche Folgerung	273
D.9	Taylorreihen – und eine wichtige Folgerung	275
D.10	Laurentreihen – und eine weitere wichtige Folgerung	278
D.11	Residuenkalkül	280
D.12	Analytische Fortsetzung	282
E	Anwendung auf die Zeta-Funktion	285
E.1	Analytische Fortsetzung von Zeta	285
E.2	Funktionalgleichung für Zeta	288
	Literaturverzeichnis	291
	Namensverzeichnis	299
	Sachverzeichnis	303