

# Inhaltsverzeichnis

1.	Einführende Betrachtungen . . . . .	11
1.1.	Der Begriff der Differentialgleichung . . . . .	11
1.2.	Die Lösung einer Differentialgleichung als Kurvenschar . . . . .	16
1.3.	Die Differentialgleichung einer Kurvenschar . . . . .	18
1.4.	Auftreten von Differentialgleichungen in der Praxis . . . . .	19
1.4.1.	Pendelschwingungen . . . . .	20
1.4.2.	Federschwingungen . . . . .	21
1.4.3.	Das Rollpendel . . . . .	23
1.4.4.	Abrollen einer Kugel . . . . .	25
1.4.5.	Elektrische Kreise . . . . .	27
1.4.6.	Stabknickung . . . . .	31
1.4.7.	Stabknickung mit Berücksichtigung des Eigengewichts . . . . .	33
	Aufgaben zu Abschnitt 1. . . . .	35
2.	Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	39
2.1.	Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung durch Trennung der Veränderlichen . . . . .	40
2.2.	Gleichgradige Differentialgleichungen . . . . .	43
2.3.	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	46
2.3.1.	Die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung . . . . .	46
2.3.2.	Die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung . . . . .	47
2.4.	Orthogonale Trajektorien . . . . .	55
	Aufgaben zu Abschnitt 2. . . . .	56
3.	Erniedrigung der Ordnung bei speziellen Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	60
3.1.	Behandlung von $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ . . . . .	60
3.2.	Behandlung von $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ . . . . .	61
	Aufgaben zu Abschnitt 3. . . . .	66
4.	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	67
4.1.	Allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen . . . . .	67

4.1.1.	Die Gestalt der allgemeinen Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung. Lineare Unabhängigkeit der partikulären Lösungen . . . .	67
4.1.2.	Die Gestalt der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung . . . .	71
4.1.3.	Erniedrigung der Ordnung einer linearen Differentialgleichung . . . .	72
4.1.4.	Die Variation der Konstanten . . . . .	75
4.1.5.	Die Berücksichtigung der Anfangsbedingungen. Zusammenfassung . .	80
4.2.	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . .	82
4.2.1.	Die homogene Gleichung . . . . .	82
4.2.1.1.	Alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind reell und verschieden	84
4.2.1.2.	Alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind verschieden; unter ihnen gibt es komplexe Wurzeln . . . . .	85
4.2.1.3.	Unter den Wurzeln der charakteristischen Gleichung gibt es mehrfache Wurzeln . . . . .	87
4.2.2.	Die inhomogene Gleichung (spezielle Lösungsansätze) . . . . .	90
4.2.3.	Ausgleichsvorgang und stationärer Vorgang bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Stabilitätskriterien . . . .	97
4.3.	EULERSche Differentialgleichungen . . . . .	99
4.4.	Die Methode der LAPLACE-Transformation . . . . .	102
	Aufgaben zu Abschnitt 4. . . . .	112
5.	Systeme von Differentialgleichungen . . . . .	115
5.1.	Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme . . . . .	115
5.2.	Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten .	118
	Aufgaben zu Abschnitt 5. . . . .	121
6.	Lösung von Differentialgleichungen durch Potenzreihenansatz . . . .	123
6.1.	Beschreibung des Verfahrens . . . . .	123
6.2.	BESSELSche Funktionen . . . . .	128
6.2.1.	Lösung der BESSELSchen Differentialgleichung . . . . .	128
6.2.2.	Beziehungen zwischen BESSELSchen Funktionen mit verschiedenen Indizes . . . . .	131
6.2.3.	Die Schwingungen einer kreisförmigen Membran . . . . .	132
	Aufgaben zu Abschnitt 6. . . . .	136
7.	Angenäherte Lösung von Differentialgleichungen . . . . .	137
7.1.	Grafische Lösungsverfahren bei Differentialgleichungen erster Ordnung	137
7.1.1.	Das Richtungsfeld. Das Isoklinenverfahren . . . . .	137
7.1.2.	Das Polygonzugverfahren . . . . .	140
7.1.3.	Verbessertes Polygonzugverfahren . . . . .	143
7.1.4.	Das Polygonzugverfahren für Systeme von Differentialgleichungen . .	146
7.2.	Ein Existenzsatz. Die Methode der sukzessiven Approximation . . . .	146
7.2.1.	Das Verfahren für die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ . . . . .	146
7.2.2.	Das Verfahren für Systeme von Differentialgleichungen . . . . .	155
7.2.3.	Kleine Veränderungen in der Differentialgleichung . . . . .	158
7.3.	Das RUNGE-KUTTA-Verfahren . . . . .	160
7.3.1.	Die SIMPSONSche Regel . . . . .	160

7.3.2.	Das RUNGE-KUTTA-Verfahren für die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ . . . . .	163
7.3.3.	Schrittkennzahl, Fehlerbetrachtung, Rechenkontrollen . . . . .	166
7.3.4.	Ein Beispiel. Automatische Schrittweitenwahl und -korrektur . . . . .	169
7.3.5.	Das RUNGE-KUTTA-Verfahren für ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	176
7.3.6.	Das RUNGE-KUTTA-Verfahren für Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	178
7.4.	Das Differenzenschema-Verfahren . . . . .	184
7.4.1.	Beschreibung des Verfahrens bei der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ . . . . .	184
7.4.2.	Die Konvergenz des Iterationsverfahrens . . . . .	187
7.4.3.	Ein Beispiel . . . . .	188
7.4.4.	Das Verfahren für ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	189
7.5.	Die Methode der Differenzenquotienten . . . . .	195
7.5.1.	Beschreibung des Verfahrens . . . . .	195
7.5.2.	Finite Ausdrücke für die Ableitungen . . . . .	199
7.5.3.	Durchbiegung eines Balkens . . . . .	201
7.5.4.	Stabknickung unter Berücksichtigung des Eigengewichts . . . . .	206
	Aufgaben zu Abschnitt 7. . . . .	210
8.	Lösung von Differentialgleichungen mit Analogrechnern . . . . .	211
8.1.	Einführende Betrachtungen . . . . .	211
8.2.	Die linearen Rechenelemente . . . . .	214
8.2.1.	Summierer . . . . .	215
8.2.2.	Integrierer . . . . .	215
8.2.3.	Potentiometer . . . . .	217
8.3.	Nichtlineare Rechenelemente . . . . .	217
8.3.1.	Funktionsgeneratoren . . . . .	217
8.3.2.	Funktionsmultiplizierer . . . . .	219
8.4.	Einführung in die Programmierung . . . . .	219
8.4.1.	Aufstellung des Koppelplans . . . . .	220
8.4.2.	Normierung des Koppelplans . . . . .	223
8.5.	Funktionserzeugung und Funktionswandlung . . . . .	227
8.6.	Einige Bemerkungen zu Rand- und Eigenwertaufgaben . . . . .	230
8.7.	Digitale Simulation von Analogrechnerprogrammen . . . . .	233
	Lösungen der Aufgaben . . . . .	237
	Literatur- und Quellenverzeichnis . . . . .	251
	Sachwortverzeichnis . . . . .	253