

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	10
<b>Teil I: Approximation durch Reihenentwicklung und Interpolation</b>	
<b>Kapitel I. Darstellung komplexer Funktionen durch Orthogonalreihen und Faber-Reihen</b> .....	12
§ 1. <i>Der Hilbert-Raum <math>L^2(G)</math></i> .....	12
A. Definition von $L^2(G)$ .....	12
B. $L^2(G)$ als Hilbert-Raum .....	14
§ 2. <i>ON-Systeme, insbesondere von Polynomen, in <math>L^2(G)</math></i> .....	15
A. Konstruktion von ON-Systemen; Gramsche Matrix .....	15
A <sub>1</sub> . Orthogonalisierungsverfahren von Schmidt .....	15
A <sub>2</sub> . Gewinnung eines ON-Systems mit der Gramschen Matrix .....	16
A <sub>3</sub> . Spezieller Fall: Polynome in $L^2(G)$ .....	18
B. Nullstellen orthogonaler Polynome .....	19
C. Asymptotische Darstellung der ON-Polynome .....	20
Hinweis zu § 2 .....	23
§ 3. <i>Vollständigkeit der Polynome in <math>L^2(G)</math></i> .....	24
A. Problem und Beispiele .....	24
B. Gebiete mit PA-Eigenschaft .....	25
C. Gebiete, welche die PA-Eigenschaft nicht haben .....	27
C <sub>1</sub> . Schlitzgebiete .....	27
C <sub>2</sub> . Mondgebiete .....	27
Hinweise zu § 3. ....	30
§ 4. <i>Entwicklung nach ON-Systemen in <math>L^2(G)</math></i> .....	30
A. ON-Entwicklungen im Hilbert-Raum .....	31
B. ON-Entwicklungen im Raum $L^2(G)$ .....	32
C. Über die Güte der Approximation, falls $f$ in $\mathcal{G}$ analytisch ist .....	33
Hinweise zu § 4. ....	35
§ 5. <i>Die Bergmansche Kernfunktion</i> .....	36
A. Einführung der Kernfunktion; Eigenschaften .....	36

B. Bilinearreihe der Bergmanschen Kernfunktion . . . . .	37
C. Konstruktion konformer Abbildungen mit Hilfe der Bergmanschen Kernfunktion . . . . .	38
C <sub>1</sub> . Zusammenhang zwischen $K$ und der konformen Abbildung . . . . .	38
C <sub>2</sub> . Die Bieberbach-Polynome . . . . .	39
C <sub>3</sub> . Verwendung singularer Funktionen beim ON-Prozeß . . . . .	41
D. Weitere Anwendungen der Bergmanschen Kernfunktion . . . . .	42
D <sub>1</sub> . Gebiete mit Mittelwertigkeit . . . . .	42
D <sub>2</sub> . Darstellung von $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$ als Flächenintegral . . . . .	42
Hinweis zu § 5 . . . . .	45
<b>§ 6. Über die Güte der Approximation; Faber-Entwicklungen</b> . . . . .	45
A. Randverhalten von Cauchy-Integralen . . . . .	45
B. Faber-Polynome, Faber-Entwicklungen . . . . .	46
C. Die Faber-Abbildung als beschränkter Operator . . . . .	49
C <sub>1</sub> . Kurven beschränkter Drehung . . . . .	49
C <sub>2</sub> . Die Faber-Abbildung $T$ . . . . .	50
D. Güte der Approximation innerhalb einer Kurve beschränkter Drehung . . . . .	52
D <sub>1</sub> . Vorbereitungen; gleichmäßige Konvergenz . . . . .	52
D <sub>2</sub> . Stetigkeitsmodul des zu $h$ gehörigen Cauchy-Integrals . . . . .	53
D <sub>3</sub> . Güte der Approximation . . . . .	54
E. Bericht über weitere Ergebnisse . . . . .	56
E <sub>1</sub> . Weitere gleichmäßige Abschätzungen . . . . .	56
E <sub>2</sub> . Lokale Abschätzungen . . . . .	57
Hinweise zu § 6. . . . .	58

## Kapitel II. Approximation durch Interpolation . . . . . 60

<b>§ 1. Die Hermitesche Interpolationsformel</b> . . . . .	60
A. Darstellungen des Interpolationspolynoms . . . . .	60
B. Sonderfälle der Hermiteschen Formel . . . . .	61
<b>§ 2. Interpolation in gleichverteilten Punkten; Fejér-Punkte, Fekete-Punkte.</b> . . . . .	63
A. Vorbereitungen; grobe Konvergenzaussage . . . . .	63
B. Allgemeiner Konvergenzsatz von Kalmár und Walsh . . . . .	65
C. Das System der Fejér-Knoten . . . . .	68
D. Das System der Fekete-Knoten . . . . .	70
Hinweise zu § 2. . . . .	71
<b>§ 3. Approximation auf allgemeineren kompakten Mengen; der Satz von Runge</b> . . . . .	72
A. Nochmals: Interpolation in Fekete-Punkten . . . . .	73

B. Der Approximationssatz von Runge . . . . .	75
Hinweis zu § 3 . . . . .	77
§ 4. <i>Interpolation im Einheitskreis</i> . . . . .	77
A. Interpolation auf $\{z:  z  = r\}$ , $r < 1$ . . . . .	77
B. Interpolation auf $\{z:  z  = 1\}$ . . . . .	80
C. Approximation durch rationale Funktionen . . . . .	84
Hinweise zu § 4. . . . .	85

## Teil II: Allgemeine Approximationssätze im Komplexen

<b>Kapitel III. Approximation auf kompakten Mengen</b> . . . . .	88
§ 1. <i>Der Approximationssatz von Runge</i> . . . . .	88
A. Allgemeine Cauchy-Formel . . . . .	89
B. Der Satz von Runge . . . . .	89
C. Die Methode der Polverschiebung . . . . .	90
§ 2. <i>Der Satz von Mergelyan</i> . . . . .	92
A. Formulierung des Ergebnisses; Sonderfälle; Folgerungen . . . . .	92
B. Hilfsmittel zum Beweis . . . . .	94
B <sub>1</sub> . Erweiterungssatz von Tietze . . . . .	94
B <sub>2</sub> . Eine Darstellungsformel . . . . .	94
B <sub>3</sub> . Koebe's $\frac{1}{4}$ -Satz . . . . .	95
B <sub>4</sub> . Das Lemma von Mergelyan . . . . .	95
C. Beweis des Satzes von Mergelyan . . . . .	98
§ 3. <i>Approximation durch rationale Funktionen</i> . . . . .	102
A. Schweizer Käse . . . . .	103
A <sub>1</sub> . Die Konstruktion von Alice Roth . . . . .	103
A <sub>2</sub> . Schweizer Käse mit inneren Punkten . . . . .	104
A <sub>3</sub> . Schweizer Käse mit zwei Komponenten . . . . .	105
A <sub>4</sub> . Häufung von Löchern gegen den Durchmesser von $\mathbf{D}$ . . . . .	105
B. Hilfsmittel für den Satz von Bishop . . . . .	106
B <sub>1</sub> . Eine Integraltransformation . . . . .	106
B <sub>2</sub> . Zerlegung der Eins . . . . .	107
C. Der Lokalisationssatz von Bishop mit Anwendungen . . . . .	108
C <sub>1</sub> . Der Lokalisationssatz . . . . .	108
C <sub>2</sub> . Anwendungen des Satzes von Bishop . . . . .	110
D. Der Satz von Vitushkin; ein Bericht . . . . .	112
Hinweise zu § 3. . . . .	113
§ 4. <i>Das Fusion Lemma von Roth</i> . . . . .	113
A. Das Fusion Lemma . . . . .	113
B. Neuer Beweis des Satzes von Bishop . . . . .	117

<b>Kapitel IV. Approximation auf abgeschlossenen Mengen . . . . .</b>	<b>119</b>
§ 1. <i>Gleichmäßige Approximation durch meromorphe Funktionen . . .</i>	119
A. Problemstellung . . . . .	119
B. Der Approximationssatz von Roth . . . . .	120
C. Sonderfälle des Approximationssatzes . . . . .	121
C <sub>1</sub> . Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung $G^*$ von $G$ ; Zusammen-	
hang von $G^*V$ . . . . .	122
C <sub>2</sub> . Drei hinreichende Kriterien für meromorphe Approxi-	
mation . . . . .	123
D. Charakterisierung der Mengen, auf denen meromorphe Appro-	
ximation möglich ist . . . . .	124
§ 2. <i>Gleichmäßige Approximation durch holomorphe Funktionen . . .</i>	125
A. Polverschiebung bei meromorphen Funktionen . . . . .	125
B. Topologische Vorbemerkungen . . . . .	126
C. Der Approximationssatz von Arakeljan . . . . .	127
C <sub>1</sub> . Approximation meromorpher durch holomorphe Funk-	
tionen . . . . .	127
C <sub>2</sub> . Der Satz von Arakeljan . . . . .	129
Hinweise zu § 2. . . . .	131
§ 3. <i>Approximation mit Geschwindigkeit . . . . .</i>	131
A. Problemstellung; Satz von Carleman . . . . .	132
A <sub>1</sub> . Tangentielle Approximation; $\epsilon$ -Approximation . . . . .	132
A <sub>2</sub> . Zwei Hilfssätze . . . . .	132
A <sub>3</sub> . Der Satz von Carleman . . . . .	135
B. Der Sonderfall $F$ nirgends dicht . . . . .	137
B <sub>1</sub> . Hinreichende Bedingungen für $\epsilon$ -Approximation . . . . .	137
B <sub>2</sub> . Tangentielle Approximation, falls $F^\circ = \phi$ . . . . .	139
C. Der Satz von Nersesjan . . . . .	140
C <sub>1</sub> . Die Bedingung (A); ein Hilfssatz . . . . .	140
C <sub>2</sub> . Der Satz von Nersesjan . . . . .	141
Hinweise zu § 3. . . . .	143
§ 4. <i>Approximation mit gewisser Geschwindigkeit . . . . .</i>	144
A. $\epsilon$ -Approximation ohne Bedingung (A) . . . . .	145
B. Wachstum der approximierenden Funktion . . . . .	146
C. Der Sonderfall $F = \mathbb{R}$ . . . . .	146
§ 5. <i>Einige Anwendungen der Approximationssätze . . . . .</i>	147
A. Radiale Randwerte ganzer Funktionen . . . . .	147
B. Randverhalten im Einheitskreis analytischer Funktionen. . .	151
B <sub>1</sub> . Ein allgemeiner Approximationssatz . . . . .	152
B <sub>2</sub> . Das Dirchlet-Problem für radiale Randwerte . . . . .	154
C. Approximation und Eindeutigkeitsaussagen . . . . .	155
D. Verschiedene weitere Konstruktionen . . . . .	156
D <sub>1</sub> . Vorgeschriebenes Randverhalten längs abzählbar vieler	
Kurven . . . . .	156

D <sub>2</sub> . Analytische Funktionen mit vorgeschriebenen cluster sets . . . . .	157
D <sub>3</sub> . Schneider's Nudeln . . . . .	158
D <sub>4</sub> . Julia-Richtungen ganzer Funktionen . . . . .	158
Hinweise zu § 5. . . . .	159
<b>Symbole und Bezeichnungen . . . . .</b>	<b>161</b>
<b>Literatur . . . . .</b>	<b>162</b>
<b>Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>174</b>