Inhaltsverzeichnis

0 Worum geht es? 13

Gruppen **17**

1 Die Isomorphiesätze der Gruppentheorie 17

1.1 Einige Grundbegriffe 17

1.2 Aussagen über Bild und Urbild 19

1.3 Homomorphiesatz 20

1.4 Ein Untergruppenkriterium 20

1.5 Erster Noetherscher Isomorphiesatz 21

1.6 Zweiter Noetherscher Isomorphiesatz 22

1.7 Übungsaufgaben 5 – 10 22

2 Die Sylowschen Sätze 24

2.1 Hilfssatz über Binomialkoeffizienten 24

2.2 Abzählformel und Bahnformel 25

2.3 Erster Sylowscher Satz 26

2.4 Satz von Cauchy 27

2.5 Gruppen der Ordnung 6 27

2.6 p-Gruppen 28

2.7 p-Sylowgruppen 28

2.8 Zweiter Sylowscher Satz 29

2.9 Folgerungen 29

2.10 Der Normalisator einer Untergruppe 30

2.11 Dritter Sylowscher Satz 31

2.12 Satz von Lagrange 31

2.13 Gruppen der Ordnung 15 32

2.14 Übungsaufgaben 11 – 16 34

3 Strukturaussagen über einige Gruppen 35

3.1 Die Klassengleichung 35

3.2 Das Zentrum einer p-Gruppe ist nicht-trivial 36

3.3 Existenz von Normalteilern in p-Gruppen 36

3.4 Zyklische Gruppen 37

3.5 Gruppen der Ordnung p^2 37
3.6 Gruppen der Ordnung $2p$ 38
3.7 Direkte Produkte von Normalteilern 39
3.8 Endliche abelsche Gruppen 40
3.9 Übungsaufgaben 17 – 22 42

4 Auflösbare Gruppen 43
4.1 Definition einer auflösbaren Gruppe 43
4.2 Beispiele 43
4.3 Untergruppen und Bilder auflösbarer Gruppen 43
4.4 Verfeinerung von Normalreihen 44
4.5 Kommutatorgruppen 46
4.6 Beispiele 46
4.7 Iterierte Kommutatorgruppen 47
4.8 Kriterium für Auflösbarkeit mit Kommutatoren 48
4.9 Übungsaufgaben 23–26 48

5 Exkurs über Permutationsgruppen 49
5.1 Symmetrische Gruppe S_n 49
5.2 Zyklen 50
5.3 Kanonische Zyklenzerlegung einer Permutation 50
5.4 Das Vorzeichen einer Permutation 51
5.5 Alternierende Gruppe A_n 53
5.6 Einfachheit von A_n für $n \geqslant 5$ 53
5.7 S_n ist für $n \geqslant 5$ nicht auflösbar 55
5.8 Bemerkung über Transpositionen 55
5.9 Übungsaufgaben 27 – 30 56

Ringe **57**

6 Grundbegriffe der Ringtheorie 57
6.1 Definition eines Ringes 57
6.2 Einheiten und Nullteiler 58
6.3 Beispiele 58
6.4 Unterringe 59
6.5 Ideale 59
6.6 Summe, Durchschnitt und Produkt von Idealen 60
6.7 Erzeugung von Idealen 61
6.8 Hauptidealringe 61
6.9 Ringhomomorphismen 62
6.10 Quotientenringe 63
6.11 Quotientenkörper 64
6.12 Polynomringe 65
6.13 Der Grad eines Polynoms 66
6.14 Hilbertscher Basissatz 67

6.15 Übungsaufgaben 31 – 35 68
7 Restklassenringe 69
7.1 Kongruenzen 69
7.2 Rechnen mit Restklassen 70
7.3 Ideale im Restklassenring 71
7.4 Primideale und maximale Ideale 71
7.5 Das Zornsche Lemma 72
7.6 Existenz maximaler Ideale 73
7.7 Der Homomorphiesatz für Ringe 73
7.8 Chinesischer Restsatz 73
7.9 Übungsaufgaben 36 – 40 76
8 Teilbarkeit in kommutativen Ringen 77
8.1 Division mit Rest im Polynomring 77
8.2 Nullstellen und Linearfaktoren 77
8.3 Euklidische Ringe 78
8.4 ggT und kgV 79
8.5 Irreduzible Elemente und Primelemente 80
8.6 Assoziierte Elemente 81
8.7 Eindeutigkeit von Primfaktorzerlegungen 81
8.8 Primfaktorzerlegung in Hauptidealringen 82
8.9 Faktorielle Ringe 82
8.10 Existenz von ggT und kgV in faktoriellen Ringen 83
8.11 Spezielle Version des Chinesischen Restsatzes 84
8.12 Beispiele für Körper 84
8.13 Übungsaufgaben 41 – 44 85
9 Primfaktorzerlegung in Polynomringen 86
9.1 Hilfssatz über Primelemente 86
9.2 Primitive Polynome 86
9.3 Übergang zum Quotientenkörper von R 87
9.4 Satz von Gauß 88
9.5 Umkehrung des Satzes von Gauß 88
9.6 Wann ist ein Polynomring ein Hauptidealring? 88
9.7 Eisensteinsches Irreduzibilitätskriterium 89
9.8 Eisensteinpolynome 90
9.9 Irreduziblitätsnachweis durch Substitution 90
9.10 Das p-te Kreisteilungspolynom 90
9.11 Reduktionssatz 91
9.12 Beispiel zum Reduktionssatz 92
9.13 Übungsaufgaben 45 – 48 92
10 R-Moduln 93
10.1 Links- und Rechtsmoduln 93
10.2 Beispiele für R-Moduln 93

10.3 R-Modulhomomorphismen 94
10.4 Untermoduln 94
10.5 Erzeugendensysteme 94
10.6 Beispiele für freie Moduln 95
10.7 Definition des Tensorprodukts 95
10.8 Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes 96
10.9 Folgerungen 96
10.10 Das Tensorprodukt von direkten Summen 97
10.11 Tensorprodukt mit einem freien Modul 97
10.12 Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen 98
10.13 Übungsaufgaben 49–50 103

Körper **105**

11 Grundbegriffe der Körpertheorie 105
11.1 Wiederholung der Definition eines Körpers 105
11.2 Teilkörper und Körpererweiterungen 105
11.3 Erzeugung und Adjunktion 106
11.4 Isomorphismen und K-Isomorphismen 106
11.5 Die Charakteristik eines Integritätsrings 107
11.6 Primkörper 107
11.7 Der Grad einer Körpererweiterung 108
11.8 Algebraische und transzendente Elemente 109
11.9 Das Minimalpolynom 109
11.10 Satz über den Grad des Minimalpolynoms 109
11.11 Beispiele 110
11.12 Charakterisierung algebraischer Elemente 111
11.13 Einfache Körpererweiterungen 111
11.14 Übungsaufgaben 51 – 54 112

12 Algebraische Körpererweiterungen 113
12.1 Endliche und algebraische Körpererweiterungen 113
12.2 Der algebraische Abschluss von K in L 114
12.3 Die Eigenschaft „algebraisch“ ist transitiv 114
12.4 Existenz von Nullstellen in Körpererweiterungen 114
12.5 Existenz eines Zerfällungskörpers 115
12.6 Differenziation und mehrfache Nullstellen 116
12.7 Übungsaufgaben 55 – 59 117

13 Normale Körpererweiterungen 118
13.1 Ein Fortsetzungslemma 118
13.2 Eindeutigkeit des Zerfällungskörpers 119
13.3 Endliche normale Körpererweiterungen 119
13.4 Einbettung in eine normale Erweiterung 120
13.5 Der Satz vom primitiven Element 120

13.6 Übungsaufgaben 60–64 122

14 Endliche Körper 123

14.1 Satz über die Ordnung von Gruppenelementen 123
14.2 Endliche Untergruppen von K^* sind zyklisch 124
14.3 Anzahl der Elemente eines endlichen Körpers 124
14.4 Der Körper mit p^n Elementen 125
14.5 Kleiner Satz von Fermat 125
14.6 Satz von Wilson 126
14.7 Übungsaufgaben 65 – 69 126

Galoistheorie **127**

15 Galoiserweiterungen 127

15.1 Fixkörper 127
15.2 Wirkung einer endlichen Untergruppe von $\mathrm{Aut}(L)$ 128
15.3 Beispiel 129
15.4 Der Grad über dem Fixkörper 129
15.5 Die Galoisgruppe einer Körpererweiterung 130
15.6 Satz über die Ordnung der Galoisgruppe 130
15.7 Definition einer Galoiserweiterung 131
15.8 Charakterisierung von Galoiserweiterungen 131
15.9 Einbettung in eine Galoiserweiterung 132
15.10 Übungsaufgaben 70 – 71 132

16 Hauptsatz der Galoistheorie 133

16.1 Hauptsatz 133
16.2 Beispiel 134
16.3 Wann ist ein Zwischenkörper galoissch über K? 134
16.4 Beispiel 135
16.5 Abelsche und zyklische Erweiterungen 136
16.6 Zwischenkörper einer zyklischen Erweiterung 136
16.7 Der Frobenius-Homomorphismus 137
16.8 Vollkommene Körper 137
16.9 Bemerkung über Zwischenkörper 138
16.10 Übungsaufgaben 72 – 74 138

Anwendungen und Ergänzungen **139**

17 Einheitswurzelkörper 139

17.1 Einheitswurzeln 139
17.2 Die Eulersche φ-Funktion 140
17.3 Primitive n-te Einheitswurzeln 141
17.4 Der n-te Einheitswurzelkörper ist abelsch 141
17.5 Das n-te Kreisteilungspolynom 141
17.6 Irreduzibilität in $\mathbb{Q}[X]$ 143

17.7 Übungsaufgaben 75–76 144
18 Auflösbarkeit von Gleichungen 145
18.1 Galoisgruppe eines Polynoms 145
18.2 Radikalerweiterung 145
18.3 Galoisgruppe einer reinen Gleichung 145
18.4 Lineare Unabhängigkeit von Charakteren 146
18.5 Kompositum von Zwischenkörpern 147
18.6 Gleichungen mit auflösbarer Galoisgruppe 148
18.7 Durch Radikale auflösbare Gleichungen 148
18.8 Nicht auflösbare Gleichungen vom Grad p 149
18.9 Rationaler Funktionenkörper 150
18.10 Symmetrische Funktionen 151
18.11 Die allgemeine Gleichung n-ten Grades 152
18.12 Übungsaufgaben 77–80 153
19 Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal 154
19.1 Konstruktion von Senkrechten und Parallelen 154
19.2 Lemma über konstruierbare Punkte 155
19.3 Wurzeln konstruierbarer Punkte 157
19.4 Algebraische Formulierung der Konstruierbarkeit 157
19.5 Konstruierbare Punkte haben 2-Potenzgrad 159
19.6 Delisches Problem der Würfelverdoppelung 160
19.7 Problem der Quadratur des Kreises 160
19.8 Problem der Winkeldreiteilung 160
19.9 Regelmäßige n-Ecke 161
20 Algebraischer Abschluss eines Körpers 162
20.1 Algebraisch abgeschlossene Körper 162
20.2 Definition des algebraischen Abschlusses 163
20.3 Polynomringe in beliebig vielen Unbestimmten 163
20.4 Existenz des algebraischen Abschlusses 164
20.5 Eindeutigkeit des algebraischen Abschlusses 165
20.6 Universelle Eigenschaft des Polynomrings 166

Literaturverzeichnis **168**

Index **169**