

# Inhalt

## 1 Vektorrechnung in zwei und drei Dimensionen

<b>1.1 Vektoren in der Ebene</b>	1
1.1.1 Kartesische Koordinaten und Zahlenmengen	2
1.1.2 Winkelfunktionen und Polarkoordinaten	4
1.1.3 Vektoren im $\mathbb{R}^2$	9
1.1.4 Physikalische und technische Anwendungen	14
1.1.5 Inneres Produkt (Skalarprodukt)	24
1.1.6 Parameterform und Hessesche Normalform einer Geraden	28
1.1.7 Geometrische Anwendungen	35
<b>1.2 Vektoren im dreidimensionalen Raum</b>	44
1.2.1 Der Raum $\mathbb{R}^3$	44
1.2.2 Inneres Produkt (Skalarprodukt)	49
1.2.3 Dreireihige Determinanten	52
1.2.4 Äußeres Produkt (Vektorprodukt)	53
1.2.5 Physikalische, technische und geometrische Anwendungen	59
1.2.6 Spatprodukt, mehrfache Produkte	66
1.2.7 Lineare Unabhängigkeit	70
1.2.8 Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$	74

## 2 Vektorräume beliebiger Dimensionen

<b>2.1 Die Vektorräume <math>\mathbb{R}^n</math> und <math>\mathbb{C}^n</math></b>	79
2.1.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$ und seine Arithmetik	79
2.1.2 Inneres Produkt, Beträge von Vektoren	81
2.1.3 Unterräume, lineare Mannigfaltigkeiten	82
2.1.4 Geometrie im $\mathbb{R}^n$ , Winkel, Orthogonalität	88
2.1.5 Der Raum $\mathbb{C}^n$	91
<b>2.2 Lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus</b>	92
2.2.1 Reguläre quadratische Gleichungssysteme	92
2.2.2 Computerprogramm für reguläre lineare Gleichungssysteme	96
2.2.3 Singuläre lineare Gleichungssysteme	100
2.2.4 Allgemeiner Satz über die Lösbarkeit linearer quadratischer Gleichungssysteme	105
2.2.5 Rechteckige Systeme, Rangkriterium	109
<b>2.3 Algebraische Strukturen: Gruppen und Körper</b>	112
2.3.1 Einführung: Beispiel einer Gruppe	112
2.3.2 Gruppen	115
2.3.3 Endliche Permutationsgruppen	120

2.3.4	Homomorphismen, Nebenklassen . . . . .	122
2.3.5	Körper . . . . .	125
<b>2.4</b>	<b>Vektorräume über beliebigen Körpern . . . . .</b>	<b>127</b>
2.4.1	Definition und Grundeigenschaften . . . . .	128
2.4.2	Beispiele für Vektorräume . . . . .	130
2.4.3	Unterräume, Basis, Dimension . . . . .	132
2.4.4	Direkte Summen, freie Summen . . . . .	137
2.4.5	Lineare Abbildungen: Definition und Beispiele . . . . .	140
2.4.6	Isomorphismen, Konstruktion linearer Abbildungen . . . . .	144
2.4.7	Kern, Bild, Rang . . . . .	147
2.4.8	Euklidische Vektorräume, Orthogonalität . . . . .	149
2.4.9	Ausblick auf die Funktionalanalysis . . . . .	152
<b>3 Matrizen</b>		
<b>3.1</b>	<b>Definition, Addition, s-Multiplikation . . . . .</b>	<b>155</b>
3.1.1	Motivation . . . . .	155
3.1.2	Grundlegende Begriffsbildung . . . . .	156
3.1.3	Addition, Subtraktion und s-Multiplikation . . . . .	158
3.1.4	Transposition, Spalten- und Zeilenmatrizen . . . . .	161
<b>3.2</b>	<b>Matrizenmultiplikation . . . . .</b>	<b>162</b>
3.2.1	Matrix-Produkt . . . . .	163
3.2.2	Produkte mit Vektoren . . . . .	166
3.2.3	Matrizen und lineare Abbildungen . . . . .	168
3.2.4	Blockzerlegung . . . . .	171
<b>3.3</b>	<b>Reguläre und inverse Matrizen . . . . .</b>	<b>173</b>
3.3.1	Reguläre Matrizen . . . . .	174
3.3.2	Inverse Matrizen . . . . .	175
<b>3.4</b>	<b>Determinanten . . . . .</b>	<b>178</b>
3.4.1	Definition, Transpositionsregel . . . . .	179
3.4.2	Regeln für Determinanten . . . . .	181
3.4.3	Berechnung von Determinanten mit dem Gaußschen Algorithmus . . . . .	185
3.4.4	Matrix-Rang und Determinanten . . . . .	189
3.4.5	Der Determinanten-Multiplikationssatz . . . . .	191
3.4.6	Lineare Gleichungssysteme: die Cramersche Regel . . . . .	192
3.4.7	Inversenformel . . . . .	194
3.4.8	Entwicklungssatz . . . . .	197
3.4.9	Zusammenstellung der wichtigsten Regeln über Determinanten . . . . .	200
<b>3.5</b>	<b>Spezielle Matrizen . . . . .</b>	<b>202</b>
3.5.1	Definition der wichtigsten speziellen Matrizen . . . . .	203
3.5.2	Algebraische Strukturen von Mengen spezieller Matrizen . . . . .	207

## X Inhalt

3.5.3	Orthogonale und unitäre Matrizen . . . . .	209
3.5.4	Symmetrische Matrizen und quadratische Formen . . . . .	212
3.5.5	Zerlegungen und Transformationen symmetrischer Matrizen . . . . .	213
3.5.6	Positiv definite Matrizen und Bilinearformen . . . . .	216
3.5.7	Kriterien für positiv definite Matrizen . . . . .	218
3.5.8	Direkte Summe und direktes Produkt von Matrizen . . . . .	221
<b>3.6</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme und Matrizen . . . . .</b>	<b>223</b>
3.6.1	Rangkriterium . . . . .	223
3.6.2	Quadratische Systeme, Fredholmsche Alternative . . . . .	226
3.6.3	Dreieckszerlegung von Matrizen durch den Gaußschen Algorithmus, Cholesky-Verfahren . . . . .	228
3.6.4	Große Gleichungssysteme, Gesamtschrittverfahren . . . . .	231
3.6.5	Einzelschrittverfahren . . . . .	235
<b>3.7</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .</b>	<b>238</b>
3.7.1	Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren . . . . .	239
3.7.2	Anwendung: Schwingungen . . . . .	242
3.7.3	Eigenschaften des charakteristischen Polynoms . . . . .	244
3.7.4	Eigenvektoren und Eigenräume . . . . .	250
3.7.5	Symmetrische Matrizen und ihre Eigenwerte . . . . .	256
<b>3.8</b>	<b>Die Jordansche Normalform . . . . .</b>	<b>263</b>
3.8.1	Praktische Durchführung der Transformation auf Jordansche Normalform . . . . .	269
3.8.2	Berechnung des charakteristischen Polynoms und der Eigenwerte einer Matrix mit dem Krylov-Verfahren . . . . .	277
3.8.3	Das Jacobi-Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen . . . . .	280
3.8.4	Von-Mises-Iteration, Deflation und inverse Iteration zur numerischen Eigenwert- und Eigenvektorberechnung. Ausblick . . . . .	283
<b>3.9</b>	<b>Matrix-Funktionen . . . . .</b>	<b>288</b>
3.9.1	Matrix-Potenzen . . . . .	288
3.9.2	Matrixpolynome . . . . .	290
3.9.3	Annullierende Polynome, Satz von Cayley-Hamilton . . . . .	292
3.9.4	Das Minimalpolynom einer Matrix . . . . .	298
3.9.5	Folgen und Reihen von Matrizen . . . . .	300
3.9.6	Potenzreihen von Matrizen . . . . .	303
3.9.7	Matrix-Exponentialfunktion, Matrix-Sinus- und Matrix-Cosinus-Funktion . . . . .	306
<b>3.10</b>	<b>Drehungen, Spiegelungen, Koordinatentransformationen . . . . .</b>	<b>311</b>
3.10.1	Drehungen und Spiegelungen in der Ebene . . . . .	311
3.10.2	Spiegelung im $\mathbb{R}^n$ , QR-Zerlegung . . . . .	314
3.10.3	Drehungen im dreidimensionalen Raum . . . . .	316
3.10.4	Spiegelungen und Drehspiegelungen im dreidimensionalen Raum . . . . .	323

3.10.5	Basiswechsel und Koordinatentransformation . . . . .	324
3.10.6	Transformation bei kartesischen Koordinaten . . . . .	328
3.10.7	Affine Abbildungen und affine Koordinatentransformationen . . . . .	329
3.10.8	Hauptachsentransformation von Quadriken . . . . .	332
3.10.9	Kegelschnitte . . . . .	337
3.10.10	Flächen zweiten Grades: Ellipsoide, Hyperboloide, Paraboloid . . . . .	341

## 4 Anwendungen

<b>4.1</b>	<b>Technische Strukturen</b> . . . . .	<b>344</b>
4.1.1	Ebene Stabwerke . . . . .	344
4.1.2	Elektrische Netzwerke . . . . .	352
<b>4.2</b>	<b>Roboter-Bewegung</b> . . . . .	<b>362</b>
4.2.1	Einführende Betrachtungen . . . . .	362
4.2.2	Kinematik eines $(n + 1)$ -gliedrigen Roboters . . . . .	364

## 5 Lineare Ausgleichsprobleme

<b>5.1</b>	<b>Methode der kleinsten Fehlerquadrate</b> . . . . .	<b>374</b>
<b>5.2</b>	<b>Generalisierte Inverse. Optimallösungen</b> . . . . .	<b>377</b>
	Lösungen zu den Übungen . . . . .	383
	Symbole . . . . .	390
	Literatur . . . . .	393
	Sachverzeichnis . . . . .	400