

Inhaltsverzeichnis

I	Über den Umgang mit reellen und komplexen Funktionen	1
1	Funktionen einer reellen Variablen	3
1.1	Definition und Eigenschaften	3
1.2	Verknüpfungen von Funktionen	4
1.2.1	Algebraische Verknüpfungen	4
1.2.2	Verkettung von Funktionen	5
1.3	Stetigkeit	5
1.4	Differentiation	6
1.4.1	Differenzierbarkeit	6
1.4.2	Das Differential	7
1.4.3	Differentiationsregeln	7
1.4.4	Die Ableitung wichtiger Funktionen	9
2	Integration von Funktionen einer reellen Variablen	11
2.1	Das bestimmte Integral	11
2.1.1	Das Riemannsches Integral	12
2.2	Verfahren zur numerischen Integration	16
2.2.1	Das Sehnentrapezverfahren	17
2.2.2	Das Rechteckverfahren	17
2.2.3	Die Simpsonsche Regel	18
2.2.4	Gaußsche Integrationsverfahren	19
2.2.5	Vergleich der genannten Verfahren	20
2.3	Das unbestimmte Integral	22
2.3.1	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	22
2.3.2	Integrationsverfahren	25
2.4	Uneigentliche Integrale	29
2.4.1	Unendliche Integrationsgrenzen	29
2.4.2	Singuläre Integranden	31
3	Näherungsdarstellungen I: Die Taylorreihe	33
3.1	Folgen und Reihen	34
3.1.1	Zahlenfolgen	34
3.1.2	Zahlenreihen	35
3.1.3	Funktionenreihen	37
3.1.4	Potenzreihen	37

3.2	Näherungsdarstellung von Funktionen	38
3.2.1	Die Taylorsche Formel	39
3.2.2	Andere Formen des Restgliedes und Beispiele	40
3.3	Taylorreihen	41
4	Komplexe Zahlen und Funktionen	45
4.1	Über das Rechnen mit komplexen Zahlen	45
4.1.1	Definitionen	45
4.1.2	Verknüpfungen komplexer Zahlen	46
4.2	Die Exponentialfunktion	48
4.2.1	Zahlenfolgen und Zahlenreihen	48
4.2.2	Funktionenreihen	49
II	Vektoren und vektorwertige Funktionen	53
5	Vektoralgebra	55
5.1	Geometrische Darstellung von Vektoren	55
5.1.1	Definitionen	55
5.1.2	Addition von Vektoren	56
5.1.3	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	56
5.1.4	Das Skalarprodukt (inneres Produkt)	57
5.1.5	Das Vektorprodukt (äußeres Produkt)	59
5.1.6	Das Spatprodukt	60
5.1.7	Das Doppelkreuzprodukt	61
5.1.8	Mehrfache Produkte	61
5.2	Lineare Abhängigkeit von Vektoren	62
5.3	Komponentendarstellung von Vektoren	62
5.4	Verknüpfung von Vektoren in kartesischen Koordinaten	64
5.4.1	Das kartesische Koordinatensystem	64
5.4.2	Die Addition zweier Vektoren	64
5.4.3	Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	64
5.4.4	Das Skalarprodukt zweier Vektoren	65
5.4.5	Das Vektorprodukt zweier Vektoren	65
5.4.6	Das Spatprodukt dreier Vektoren	66
5.4.7	Das Doppelkreuzprodukt	66
6	Über Matrizen und Determinanten	69
6.1	Matrizen	69
6.1.1	Addition und Multiplikation	69
6.1.2	Spezielle Matrizen und Eigenschaften von Matrizen	70
6.2	Determinanten	72
6.2.1	Definition	72
6.2.2	Rechenregeln	73
6.3	Lösung linearer Gleichungssysteme	75

6.3.1	Inhomogenes Gleichungssystem	75
6.3.2	Homogenes Gleichungssystem	78
7	Differentialgeometrie der Raumkurven	79
7.1	Parameterdarstellung von Raumkurven	79
7.2	Stetigkeit einer Vektorfunktion	81
7.3	Ableitung einer Vektorfunktion	81
7.4	Differentiationsregeln	82
7.5	Die Tangente einer Raumkurve	83
7.6	Der Normalenvektor	86
7.7	Das begleitende Dreibein (Frenetsche Formeln)	88
7.7.1	Eigenschaften von \vec{B} und der Zusammenhang zwischen \vec{T} , \vec{N} und \vec{B}	89
7.7.2	Beispiele zu Krümmung und Torsion	90
8	Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme I	93
8.1	Grundbegriffe	93
8.2	Kartesische Koordinaten	94
8.3	Koordinatentransformationen.	95
8.4	Zylinderkoordinaten	96
8.5	Kugelkoordinaten	100
III	Zur Vektoranalysis im \mathbb{R}^3	103
9	Die Differentiation von Funktionen mehrerer Variabler	105
9.1	Funktionen im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3	105
9.1.1	Definitionsbereich	106
9.1.2	Zur Stetigkeit	107
9.1.3	Die partielle Ableitung	107
9.1.4	Die Taylor-Formel für Funktionen dreier reeller Variabler	110
9.1.5	Das totale Differential	111
9.1.6	Der Gradient skalarer Funktionen	113
9.1.7	Die Divergenz eines Vektorfeldes	116
9.1.8	Die Rotation eines Vektorfeldes	119
9.1.9	Zusammenstellung der Differentialoperationen	123
10	Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme II	125
10.1	Linien-, Flächen- und Volumenelement	126
10.1.1	Das Linienelement	126
10.1.2	Das Flächenelement	127
10.1.3	Das Volumenelement	128
10.2	Die Differentialoperatoren	129
10.2.1	Der Gradient	129
10.2.2	Die Divergenz	130

10.2.3	Die Rotation	132
10.2.4	Der Laplace-Operator	133
10.2.5	Die Differentialoperationen in speziellen krummlinigen Koordinatensystemen	134

11 Integrationen im \mathbb{R}^3 135

11.1	Kurvenintegrale	135
11.1.1	Erklärung des Kurvenintegrals	135
11.1.2	Regeln zur Berechnung von Kurvenintegralen	137
11.1.3	Beispiele zur Wegabhängigkeit	138
11.1.4	Kurvenintegrale über Gradientenfelder	142
11.1.5	Weitere Linienintegrale	144
11.1.6	Beispiele	144
11.2	Flächenintegrale	146
11.2.1	Zur Beschreibung von Flächen im Raum	146
11.2.2	Die Berechnung von Flächenintegralen	148
11.3	Volumenintegrale	159
11.3.1	Berechnung eines Volumenintegrals durch dreifache Integration	159
11.3.2	Variablentransformation in einem Mehrfachintegral	161
11.3.3	Beispiele zur Berechnung von Volumenintegralen	164

12 Die Integralsätze 169

12.1	Der Integralsatz von Stokes	169
12.2	Der Integralsatz von Gauß	175

IV Differentialgleichungen 181

13 Gewöhnliche Differentialgleichungen: Analytische Lösungen 183

13.1	Differentialgleichungen erster Ordnung	184
13.1.1	Die Methode der Trennung der Variablen	185
13.1.2	Das Substitutionsverfahren	187
13.1.3	Integration der allgemeinen, linearen Differentialgleichung 1. Ordnung nach der Methode der Variation der Konstanten	190
13.1.4	Die vollständige (exakte) Differentialgleichung	191
13.2	Differentialgleichungen 2. Ordnung	195
13.2.1	Allgemeines	195
13.2.2	Einschub: Phasenraumtrajektorien mechanischer Bewegungen	197
13.3	Freie Schwingungen	198
13.3.1	Die Differentialgleichung der freien elastischen Schwingung	198
13.3.2	Lösung durch Ansatz	198

13.3.3	Die Differentialgleichung freier ungedämpfter Schwingungen	199
13.3.4	Die Differentialgleichung freier gedämpfter Schwingungen	201
13.3.5	Phasenraumbahnen freier Schwingungen	204
13.4	Erzwungene Schwingungen	204
13.4.1	Systeme von gekoppelten linearen Differentialgleichungen	204
13.4.2	Die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	205
14	Näherungslösungen	209
14.1	Reihenentwicklungen	210
14.1.1	Vereinfachung der Differentialgleichung durch Taylorreihenentwicklung	210
14.1.2	Die Potenzreihe als Lösungsfunktion	212
14.2	Graphische Lösungen	213
14.3	Numerische Verfahren	214
14.3.1	Integrationsverfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung	214
14.3.2	Die Integration von Differentialgleichungen höherer Ordnung	217
15	Partielle Differentialgleichungen	221
15.1	Allgemeine Eigenschaften	222
15.2	Der Bernoullische Produktansatz	223
15.2.1	Die schwingende Saite	224
15.2.2	Schwingungen einer quadratischen Membran	226
15.3	Lösung in krummlinigen Koordinaten	229
V	Fourierreihen und -transformationen	233
16	Näherungsdarstellungen II: Fourierreihen	235
16.1	Die trigonometrische Fourierreihe	236
16.1.1	Konvergenz der Fourierreihe	238
16.1.2	Allgemeines zur Berechnung der Fourierreihen	238
16.2	Die komplexe Form der Fourierreihe	241
17	Verallgemeinerung: Orthogonale Funktionensysteme	245
17.1	Komponentendarstellung n -dimensionaler Vektoren	245
17.2	Orthogonale Funktionensysteme	246
17.2.1	Voraussetzungen und Definitionen	246
17.2.2	Entwicklung einer Funktion	247

17.2.3	Beispiele orthogonaler Funktionensysteme	249
17.2.4	Zur Konvergenz der Fourierreihe	252

18 Integraltransformationen 255

18.1	Fouriertransformationen	255
18.1.1	Darstellung nichtperiodischer Funktionen	256
18.1.2	Die Fouriertransformation	256
18.1.3	Beispiele für Fouriertransformationen	258
18.2	Verallgemeinerung: Integraltransformationen	261
18.2.1	Linearität der Integraltransformationen	262
18.2.2	Anwendungen	262
18.3	Laplace-Transformationen	263
18.3.1	Definition	263
18.3.2	Laplace-Transformationen elementarer Funktionen	263
18.3.3	Laplace-Transformationen der Ableitungen von $f(t)$	264
18.3.4	Anwendung der Laplace-Transformation auf die Lösung einer Differentialgleichung	265

VI Zur Statistik und Datenanalyse 267

19 Fehlerrechnung und Statistik 269

19.1	Aus Kombinatorik und Statistik	269
19.1.1	Formeln der Kombinatorik	269
19.1.2	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	270
19.1.3	Erwartungswerte und Momente	272
19.1.4	Spezielle Verteilungen und ihre Maßzahlen	273
19.2	Fehler- und Ausgleichsrechnung	275
19.2.1	Die Methode der kleinsten Quadrate	276
19.2.2	Meßfehler – Fehlermaße	278
19.2.3	Das Fehlerfortpflanzungsgesetz	279
19.2.4	Ausgleichsrechnung	282

A Computerprogramme zu den numerischen Verfahren 287

A.1	Numerische Quadraturverfahren	287
A.2	Die Integration der Wärmeleitungsgleichung	289
A.3	Numerische Integration der nichtlinearen Schwingungsgleichung	291