
Inhalt

Teil V:	Randwertaufgaben in Gebieten, die in der Nähe mehrdimensionaler Singularitäten gestört sind	
11.	Randwertaufgaben in Gebieten mit Kanten	11
11.1.	Das Dirichlet-Problem für den Laplace-Operator	11
11.1.1.	Aufgabenstellung	11
11.1.2.	Eine Modellaufgabe im Raumkeil	12
11.1.3.	Die Randwertaufgabe im Gebiet mit einer Kante	16
11.2.	Das Neumann-Problem für den Laplace-Operator	17
11.2.1.	Aufgabenstellung	17
11.2.2.	Modellaufgaben	17
11.2.3.	Lösbarkeit des Neumann-Problems	22
11.2.4.	Eine Aufgabe in einem Gebiet mit einer herausgeschnittenen Kurve	22
11.3.	Asymptotik der Lösungen der Randwertaufgaben für den Laplace-Operator in der Nähe einer Kante	23
11.3.1.	Abschätzungen der Ableitungen der Lösung entlang der Kante	23
11.3.2.	Asymptotik der Lösung des Dirichlet-Problems	24
11.3.3.	Asymptotik der Lösung des Neumann-Problems	26
11.3.4.	Asymptotik der Lösung des Randwertproblems in einem Gebiet mit einer herausgeschnittenen Kurve	26
11.4.	Sobolewsche Aufgaben	27
11.4.1.	Aufgabenstellung	27
11.4.2.	Lösbarkeit der Aufgabe	27
11.4.3.	Asymptotik der Lösung	28
12.	Asymptotik der Lösungen der klassischen Randwertaufgaben in Gebieten mit engen Hohlräumen	29
12.1.	Asymptotik der Lösung des Neumann-Problems im Äußeren einer dünnen Röhre	29
12.1.1.	Aufgabenstellung	29
12.1.2.	Hauptglieder der Asymptotik	31
12.1.3.	Die vollständige asymptotische Entwicklung der Lösung des Neumann-Problems	36
12.2.	Asymptotik der Lösung des Dirichlet-Problems im Äußeren einer dünnen Röhre	40
12.2.1.	Aufgabenstellung und das Grenzschriftglied	41
12.2.2.	Die Integralgleichung auf der Kurve M	42
12.2.3.	Begründung der Asymptotik	45
12.2.4.	Asymptotik der Kapazität eines schmalen torusförmigen Gebietes	47
12.3.	Über den Spannungs- und Deformationszustand eines elastischen Raumes mit einer schmalen torusförmigen Einschließung	48
12.3.1.	Aufgabenstellung	48

12.3.2.	Vorbereitende Bemerkungen	49
12.3.3.	Asymptotik der Lösung	52
12.4.	Asymptotik der Lösung des Dirichlet-Problems in ebenen Gebieten mit einem schmalen Spalt	54
12.4.1.	Aufgabenstellung	55
12.4.2.	Eine Aussparung mit zusammenfließenden Ufern	55
12.4.3.	Eine schmale Kerbe mit glattem Rand	57
12.4.4.	Eine Bemerkung zur Verwendung der Resultate des Kapitels 4	61
12.5.	Asymptotik der Lösung des Dirichlet-Problems in dreidimensionalen Gebieten mit einem schmalen Spalt	62
12.5.1.	Aufgabenstellung	63
12.5.2.	Asymptotik der Lösung außerhalb einer Umgebung des Spaltes \bar{Q}_ε	63
12.5.3.	Die ebene Grenzschicht	64
12.5.4.	Konstruktion der Funktion γ	65
12.5.5.	Die Grenzschicht in der Nähe der Endpunkte des Spaltes (erstes Glied)	68
12.5.6.	Die Grenzschicht in der Nähe der Endpunkte des Spaltes (zweites Glied)	69
12.5.7.	Begründung der Asymptotik	72
12.5.8.	Asymptotik der Kapazität des „Ellipsoids“ Q_ε	75
12.5.9.	Der Fall eines Rotationsellipsoids	75
12.6.	Glättung des Randes in der Nähe einer Kante	77
12.6.1.	Das Gebiet	77
12.6.2.	Das Hauptglied der Asymptotik	78
12.6.3.	Die vollständige asymptotische Entwicklung	79
13.	Asymptotik der Lösungen des Dirichlet-Problems für Gleichungen höherer Ordnung in Gebieten mit einer herausgeschnittenen dünnen Röhre	82
13.1.	Aufgabenstellung	83
13.2.	Der Fall nichtkritischer Dimension	84
13.3.	Der Fall kritischer Dimension (Entwicklung nach Potenzen von $(\log \varepsilon)^{-1}$)	88
13.4.	Der Fall kritischer Dimension (Entwicklung nach Potenzen von ε)	95
13.4.1.	Die Gestalt der asymptotischen Entwicklung	95
13.4.2.	Die Struktur der formalen Reihe	96
13.4.3.	Die asymptotische Invertierung des Operators $A_1 \log \varepsilon + A_2 + \tilde{A}$	98
13.4.4.	Die asymptotische Potenzreihe für die Lösung	102
13.4.5.	Über das Dirichlet-Problem für harmonische Funktionen im Äußeren einer Röhre	105
Teil VI:	Randwertaufgaben in Gebieten mit schmalen Verbindungsstücken und in schmalen Gebieten	
14.	Das Dirichlet-Problem in Gebieten mit schmalen Verbindungsstücken	109
14.1.	Das Hauptglied der Asymptotik der Lösung	111
14.1.1.	Aufgabenstellung (Die Annäherung zweier Punkte auf glatten Oberflächen)	111
14.1.2.	Die Grenzaufgabe	111
14.1.3.	Asymptotik der Lösung der Ausgangsaufgabe	115
14.2.	Die vollständigen asymptotischen Entwicklungen der Lösungen	117
14.2.1.	Der Fall eines „quasizylindrischen“ Gebietes	117
14.2.2.	Asymptotik der Lösung des Dirichlet-Problems	119
14.3.	Asymptotik der Lösung bei nicht glatten rechten Seiten	120
14.3.1.	Die zweite Grenzaufgabe	120
14.3.2.	Asymptotik der Lösung	122

14.4.	Verbindungsstücke anderer Form	126
14.4.1.	Zwei zusammenlaufende konische Punkte	126
14.4.2.	Das „Haftenbleiben“ von Komponenten des Randes an einer „großen“ Menge	128
14.5.	Asymptotik der Kapazität eines Kondensators	129
14.5.1.	Das „Haftenbleiben“ von Komponenten des Randes an einem Punkt	129
14.5.2.	Andere Kondensatoren	131
14.5.3.	Die vollständige Asymptotik für die Kapazität	134
15.	Randwertaufgaben der mathematischen Physik in schmalen Gebieten	136
15.1.	Randwertaufgaben für den Laplace-Operator in schmalen Rechtecken	136
15.1.1.	Aufgabenstellung	136
15.1.2.	Asymptotik der Lösung des Dirichlet-Problems	137
15.1.3.	Asymptotik der Lösung der gemischten Randwertaufgabe	138
15.2.	Das Hauptglied der Asymptotik der Lösung einer Randwertaufgabe für ein System von Gleichungen zweiter Ordnung in Zylindern kleiner Höhe	141
15.2.1.	Aufgabenstellung	142
15.2.2.	Hilfskonstruktionen	143
15.2.3.	Asymptotik der Lösung	145
15.2.4.	Eigenschaften des Grenzoperators	147
15.2.5.	Die eindeutige Lösbarkeit der Grenzaufgabe	148
15.2.6.	Begründung der asymptotischen Entwicklung der Lösung	149
15.3.	Anwendung auf konkrete Randwertaufgaben	153
15.4.	Antiplanare Verschiebung und die Strömung idealer Flüssigkeiten in schmalen Gebieten mit einem Längsriß	157
15.4.1.	Aufgabenstellung	157
15.4.2.	Der zweidimensionale Fall	158
15.4.3.	Die Grenzschichtglieder	159
15.4.4.	Eine zusätzliche Grenzaufgabe und die Asymptotik der Intensitätsfaktoren	161
15.4.5.	Der dreidimensionale Fall	162
15.4.6.	Beispiele	163
15.5.	Intensitätsfaktoren für nahe beieinanderliegende parallele Risse	165
15.5.1.	Aufgabenstellung	166
15.5.2.	Asymptotik der Lösung innerhalb und außerhalb des schmalen Streifens zwischen den Rissen	166
15.5.3.	Die Grenzschichtglieder in der Nähe der Reißenden	167
15.5.4.	Abschätzung des Restgliedes in der Asymptotik	170
15.5.5.	Asymptotik der Intensitätsfaktoren	171
15.5.6.	Gegeneinander verschobene Risse	173
16.	Allgemeine elliptische Randwertaufgaben in schmalen Gebieten	175
16.1.	Die Grenzaufgaben	176
16.1.1.	Aufgabenstellung	176
16.1.2.	Die Struktur der Differentialoperatoren	177
16.1.3.	Elliptizitätsbedingungen	178
16.1.4.	Die erste Grenzaufgabe	178
16.1.5.	Die zweite Grenzaufgabe	179
16.1.6.	Die dritte Grenzaufgabe	181
16.2.	Die asymptotische Struktur der Lösungen	184
16.2.1.	Die Fredholm-Eigenschaft der Ausgangsaufgabe	184
16.2.2.	Der Fall der eindeutigen Lösbarkeit der Grenzaufgaben	187

16.2.3.	Lösungen der dritten Grenzaufgabe	190
16.2.4.	Asymptotik im Fall $K + K^k > 0$	192
16.3.	Beispiele	196
16.4.	Durchbiegung einer dünnen Platte	200
16.4.1.	Aufgabenstellung	200
16.4.2.	Die ersten zwei Grenzaufgaben	201
16.4.3.	Eine zusätzliche Grenzaufgabe	202
16.4.4.	Die Grenzschicht	203
16.4.5.	Randbedingungen in der dritten Grenzaufgabe	209
16.4.6.	Asymptotik der Lösung	210

Teil VII: Randwertaufgaben mit Oszillationen der Koeffizienten der Gleichungen oder des Randes des Gebietes

17.	Elliptische Randwertaufgaben mit schnell oszillierenden Koeffizienten	211
17.1.	Mittelung der Differentialgleichung	211
17.1.1.	Aufgabenstellung	211
17.1.2.	Die Grenzaufgabe auf der Periodizitätzelle	212
17.1.3.	Die gemittelte Gleichung	213
17.1.4.	Die asymptotische Reihe	215
17.2.	Die Grenzschicht. Das Dirichlet-Problem	216
17.2.1.	Die Randwertaufgabe für das Grenzschichtglied	216
17.2.2.	Die Abklingbedingungen für das Grenzschichtglied	218
17.3.	Die Grenzschicht. Das Neumann-Problem	222
17.4.	Begründung der asymptotischen Entwicklungen	225
17.5.	Über elliptische Randwertaufgaben mit periodischen Koeffizienten in einem Zylinder	228
17.5.1.	Eine Modellaufgabe im Zylinder	228
17.5.2.	Eine Aufgabe mit einem komplexen Parameter	229
17.5.3.	Ein Analogon zur Fourier-Transformation	230
17.5.4.	Die eindeutige Lösbarkeit der Modellaufgabe	232
17.5.5.	Asymptotik der Lösung	233
18.	Paradoxa des Grenzübergangs in den Lösungen von Randwertaufgaben bei der Approximation glatter Gebiete durch Polygone	235
18.1.	Approximation einer frei gelagerten konvexen Platte	236
18.1.1.	Aufgabenstellung und Charakterisierung der Resultate	236
18.1.2.	Formale Asymptotik	237
18.1.3.	Begründung der Asymptotik	241
18.1.4.	Vorgabe der Momente in den Eckpunkten der Polygone	244
18.2.	Approximation einer Öffnung in einer frei gelagerten Platte	247
18.2.1.	Aufgabenstellung	247
18.2.2.	Asymptotik der Lösung für die Platte mit polygonal berandeter Öffnung	248
18.2.3.	Vorgabe der in den Eckpunkten des Polygons konzentrierten Drehmomente	250
18.3.	Übergang zu den Bedingungen der festen Einspannung	251
19.	Mittelung eines Differentialoperators auf einem feinmaschigen periodischen krummlinigen Netz	257
19.1.	Die Randwertaufgabe auf dem Netz	257
19.1.1.	Das Netz S	257
19.1.2.	Das Netz S_ϵ	258

19.2.	Hauptglied der asymptotischen Entwicklung	259
19.2.1.	Formale Asymptotik	259
19.2.2.	Begründung der Asymptotik	261
19.2.3.	Asymptotik der Lösung instationärer Aufgaben	264
19.3.	Berechnung und Eigenschaften der Koeffizienten des gemittelten Operators	265
19.3.1.	Bestimmung der Koeffizienten des gemittelten Operators	265
19.3.2.	Die Elliptizität des gemittelten Operators	267
19.3.3.	Beispiele für die Konstruktion des gemittelten Operators	268
19.4.	Konstruktion der vollständigen asymptotischen Entwicklung	271
19.4.1.	Asymptotik der Lösung außerhalb einer Umgebung des Randes	271
19.4.2.	Konstruktion des Grenzschriftgliedes	272
19.4.3.	Bestimmung der Konstanten in der Asymptotik der Lösung der Aufgabe für die Grenzschrift	275
19.5.	Asymptotik der Lösung einer Randwertaufgabe auf in einem Zylinder eingeschlossenen Netzen	276
19.5.1.	Die Randwertaufgabe im Zylinder	276
19.5.2.	Die Randwertaufgabe auf einer Zelle	277
19.5.3.	Die asymptotische Entwicklung der Lösung der Aufgabe im Zylinder	279
20.	Mittlung von Gleichungen auf einem feinen periodischen Gitter	280
20.1.	Mittlung von Differenzgleichungen	280
20.1.1.	Ein Gitter im \mathbb{R}^n und die Menge der Wechselwirkungen seiner Punkte	280
20.1.2.	Aufgabenstellung	282
20.1.3.	Lösbarkeit der Randwertaufgabe	282
20.1.4.	Hauptglieder der Asymptotik	283
20.1.5.	Asymptotik der Lösung des instationären Problems	285
20.2.	Berechnung und Eigenschaften der Koeffizienten des gemittelten Operators	286
20.3.	Kristallgitter	289
20.3.1.	Die Gleichungen der Elastizitätstheorie	289
20.3.2.	Beispiele für die Konstruktion des gemittelten Operators	290
	Kommentare	294
	Literaturverzeichnis	297
	Inhaltsübersicht zu Band I	310
	Symbolverzeichnis	313
	Sachverzeichnis	316
	Berichtigungen zu Band I	319