INHALTSVERZEICHNIS

Einführung 1

§ 1. Der Gegenstand des Lehrganges 1
§ 2. Einige Definitionen und Bezeichnungen 5

TEIL I

ERGÄNZENDE FRAGEN DER ANALYSIS

Kapitel 1. Parameterintegrale 11

§ 1. Gleichmäßig konvergente Integrale 11
§ 2. Kugelkoordinaten 14
§ 3. Integraloperatoren mit schwacher Singularität 18
§ 4. Integraloperatoren mit schwacher Singularität (Fortsetzung) 24

Kapitel 2. Mittelfunktionen 27

§ 1. Der Mittelungskern 27
§ 2. Mittelfunktionen 28
§ 3. Konvergenz der Mittelfunktionen 29

Kapitel 3. Verallgemeinerte Ableitungen 32

§ 1. Der Begriff der verallgemeinerten Ableitung 32
§ 2. Die einfachsten Eigenschaften der verallgemeinerten Ableitung 36
§ 3. Grenzwerteigenschaften der verallgemeinerten Ableitungen 38
§ 4. Der Fall einer unabhängigen Veränderlichen 39
§ 5. Über eine Eigenschaft von Funktionen, die eine verallgemeinerte erste Ableitung besitzen 40
§ 6. Ableitungen von Integralen mit schwacher Singularität 42

Kapitel 4. Die Sobolewschen Räume 44

§ 1. Die Definition der Sobolewschen Räume 44
§ 2. Die Sobolewsche Integralidentität 45
§ 3. Einbettungssätze 49
§ 4. Die Übertragung auf allgemeinere Gebiete 51
§ 5. Äquivalente Normen in $W_p^{(k)}$ 52
§ 6. Die Ungleichungen von Friedrichs und Poincaré 54
§ 7. Über die Fortsetzung von Funktionen 58
§ 8. Der Einbettungssatz für den Grenzexponenten 66

Kapitel 5. Positiv-definite Operatoren 70

§ 1. Der Begriff des quadratischen Funktionals 70
§ 2. Positiv-definite Operatoren 71

§ 3. Der energetische Raum 75
§ 4. Das Energiefunktional und sein Minimumproblem 81
§ 5. Die verallgemeinerte Lösung 83
§ 6. Über die Separabilität des energetischen Raumes 86
§ 7. Die Erweiterung eines positiv-definiten Operators 88
§ 8. Das einfachste Randwertproblem für die gewöhnliche lineare Differentialgleichung 91
§ 9. Ein allgemeineres Minimumproblem für das quadratische Funktional 96
§ 10. Der Fall eines nur positiven Operators 98

Kapitel 6. Das Eigenspektrum eines positiv-definiten Operators 100

§ 1. Der Begriff des Eigenspektrums eines Operators 100
§ 2. Eigenwerte und Eigenelemente eines symmetrischen Operators 101
§ 3. Das verallgemeinerte Eigenspektrum eines positiv-definiten Operators 102
§ 4. Die Variationsfassung des Eigenwertproblems 104
§ 5. Der Satz über den kleinsten Eigenwert 107
§ 6. Ein Satz über das diskrete Spektrum 109
§ 7. Die Entwicklung nach dem Eigenspektrum eines positiv-definiten Operators . 111
§ 8. Das STURM-LIOUVILLEsche Problem 112
§ 9. Einige Elementarfälle 116
§ 10. Das Mini-Max-Prinzip 119
§ 11. Über das Wachstum der Eigenwerte beim STURM-LIOUVILLEschen Problem . . 122

Kapitel 7. Gleichungen in BANACH-Räumen und eindimensionale singuläre Integralgleichungen 124

§ 1. Einige Grundbegriffe 124
§ 2. Die NOETHERschen Sätze 125
§ 3. Sätze über die Stabilität des Index 127
§ 4. Das Symbol 129
§ 5. Das CAUCHYsche singuläre Integral 131
§ 6. Der CAUCHYsche Operator im Raum $L_2(\Gamma)$ 135
§ 7. Das Symbol und die Regularisierung des singulären Operators 140
§ 8. Die Berechnung des Index des singulären Operators 141

Kapitel 8. Elemente der Theorie mehrdimensionaler singulärer Integralgleichungen 144

§ 1. Einige Eigenschaften der FOURIER-Transformation 144
§ 2. Definition und Existenzbedingungen für das singuläre Integral 148
§ 3. Der Satz von GIRAUD 150
§ 4. Die FOURIER-Transformierte des singulären Kerns 154
§ 5. Singuläre Integrale in L_2 158
§ 6. Über die Differentiation von Integralen mit schwacher Singularität 161

TEIL II

ALLGEMEINES ÜBER PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Kapitel 9. Differentialgleichungen und Randwertaufgaben 167

§ 1. Der Differentialausdruck und die Differentialgleichung 167
§ 2. Die Klassifizierung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung 169
§ 3. Randbedingungen und Randwertaufgaben 172
§ 4. Das CAUCHYsche Problem 176
§ 5. Existenz-, Eindeutigkeits- und Korrektheitsprobleme bei Randwertaufgaben . 178

Kapitel 10. Charakteristiken. Die kanonische Form. Die GREENschen Formeln 185

§ 1. Transformation der unabhängigen Veränderlichen 185
§ 2. Charakteristiken. Die Beziehung zwischen den CAUCHYschen Anfangswerten auf der Charakteristik 186
§ 3. Transformation der Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf die kanonische Form 189
§ 4. Der Fall zweier unabhängiger Veränderlicher 190
§ 5. Formal adjungierte Differentialausdrücke 192
§ 6. Die GREENschen Formeln 193
§ 7. Differentialausdrücke höherer Ordnung 196

Kapitel 11. Verallgemeinerte Lösungen von Differentialgleichungen 198

§ 1. Lokal summierbare verallgemeinerte Lösungen 198
§ 2. Distributionen und verallgemeinerte Funktionen 200
§ 3. Verallgemeinerte Funktionen endlicher Ordnung 202
§ 4. Verallgemeinerte Lösungen aus der Klasse der verallgemeinerten Funktionen. Singuläre Lösungen 203
§ 5. Die singuläre Lösung der LAPLACE-Gleichung 204
§ 6. Die singuläre Lösung der Wärmeleitungsgleichung 207
§ 7. Die singuläre Lösung der Wellengleichung 209

TEIL III

GLEICHUNGEN VOM ELLIPTISCHEN TYP

Kapitel 12. LAPLACE-Gleichung und harmonische Funktionen 215

§ 1. Grundbegriffe 215
§ 2. Variablensubstitution im LAPLACE-Operator 217
§ 3. Die Integraldarstellung für Funktionen der Klasse $C^{(2)}$ und für harmonische Funktionen 221
§ 4. Der Potentialbegriff 223
§ 5. Die Eigenschaften des Volumenpotentials 225
§ 6. Der Mittelwertsatz 228
§ 7. Das Maximumprinzip 230
§ 8. Teilräume harmonischer Funktionen 232
§ 9. Übertragung auf Gleichungen mit variablen Koeffizienten 235

Kapitel 13. Das DIRICHLETsche und das NEUMANNsche Problem 241

§ 1. Aufgabenstellung 241
§ 2. Unitätssätze für die LAPLACE-Gleichung 242
§ 3. Die Lösung des DIRICHLETschen Problems für die Kugel 247
§ 4. Der Satz von LIOUVILLE 252
§ 5. Das DIRICHLETsche Problem für das Außengebiet der Kugel 253
§ 6. Das Verhalten der Ableitungen einer harmonischen Funktion im Unendlichen 254
§ 7. Hebbare Singularitäten harmonischer Funktionen 255

Kapitel 14. Kugelfunktionen 258

§ 1. Der Begriff der Kugelfunktionen 258
§ 2. Die Differentialgleichung der Kugelfunktionen 261
§ 3. Hilfskonstruktionen und einige Hilfssätze 262
§ 4. Der Operator δ und seine Potenzen. Die Orthogonalität der Kugelfunktionen . 263
§ 5. Die Entwicklung der singulären Lösung in eine Reihe von Polynomen 265
§ 6. Die Integralgleichung der Kugelfunktionen 268

§ 7. Die Vollständigkeit des Systems der Kugelfunktionen 270
§ 8. Über das Symbol des singulären Integrals 272

Kapitel 15. Elementare Methoden zur Lösung der Grundprobleme 274

§ 1. Die DIRICHLETschen und NEUMANNschen Probleme für den Kreis 274
§ 2. Das DIRICHLETsche Problem für das Kreisringgebiet 278
§ 3. Die Anwendung der konformen Abbildungen 279
§ 4. Die Anwendung der Kugelfunktionen 281

Kapitel 16. Potentialtheorie 285

§ 1. LJAPUNOW-Flächen 285
§ 2. Der Raumwinkel 287
§ 3. Der direkte Wert des Potentials der Doppelschicht 292
§ 4. Das GAUSSsche Integral 293
§ 5. Die Grenzwerte des Potentials der Doppelschicht 296
§ 6. Die Stetigkeit des Potentials der einfachen Schicht 299
§ 7. Die Normalableitung des Potentials der einfachen Schicht 301

Kapitel 17. Die Integralgleichungen der Potentialtheorie 306

§ 1. Zurückführung der DIRICHLETschen und NEUMANNschen Probleme auf Integralgleichungen 306
§ 2. Die DIRICHLETschen und NEUMANNschen Probleme im Halbraum 308
§ 3. Untersuchung des ersten Paares adjungierter Gleichungen 309
§ 4. Untersuchung des zweiten Paares adjungierter Gleichungen 311
§ 5. Die Lösung des DIRICHLETschen Problems für das Außengebiet 313
§ 6. Der Fall zweier unabhängiger Veränderlicher 315
§ 7. Die Gleichungen der Potentialtheorie für den Kreis 320
§ 8. Über die Korrektheit des DIRICHLETschen Problems 322
§ 9. Über die Korrektheit des äußeren NEUMANNschen Problems 324
§ 10. Über die Korrektheit des inneren NEUMANNschen Problems 326

Kapitel 18. Das Problem der Richtungsableitung 329

§ 1. Aufgabenstellung 329
§ 2. Der Fall zweier Variabler. Der Index des Problems 330
§ 3. Über die Stetigkeit der Lösung 332
§ 4. Ein etwas einfacherer Fall 333
§ 5. Der Fall mehrerer Veränderlicher 337

Kapitel 19. Die Variationsmethode. Schwache Lösungen 339

§ 1. Das DIRICHLETsche Problem mit einer homogenen Randbedingung 339
§ 2. Der energetische Raum des DIRICHLETschen Problems 343
§ 3. Das DIRICHLETsche Problem für die homogene Gleichung 347
§ 4. Über die Existenz der zweiten Ableitungen der schwachen Lösung der LAPLACE-Gleichung 349
§ 5. Die Fortsetzbarkeitsbedingung 351
§ 6. Die GREENsche Funktion 353
§ 7. Das NEUMANNsche Problem. Der Fall $C(x) > 0$. 358
§ 8. Der Fall $C(x) \equiv 0$ 360
§ 9. Das NEUMANNsche Problem mit der inhomogenen Randbedingung 363
§ 10. Elliptische Differentialgleichungen höherer Ordnung und Gleichungssysteme 366
§ 11. Das DIRICHLETsche Problem für ein unbeschränktes Gebiet 368

Kapitel 20. Das Spektrum des Dirichletschen und des Neumannschen Problems . . 371

§ 1. Ein Einbettungssatz 371
§ 2. Das Spektrum des Dirichletschen Problems für das beschränkte Gebiet 372
§ 3. Einige Elementarfälle 373
§ 4. Die Wachstumsordnung der Eigenwerte 375
§ 5. Das Spektrum des Neumannschen Problems für ein beschränktes Gebiet 379
§ 6. Nicht selbstadjungierte Gleichungen 379
§ 7. Das Dirichletsche und das Neumannsche Problem für eine nicht selbstadjungierte Gleichung 382

Kapitel 21. Starke Lösungen 384

§ 1. Die Lösung der Laplace-Gleichung für das Parallelepiped 384
§ 2. Das Produkt der schwachen Lösung mit einer glatten Funktion 387
§ 3. Starke Lösungen in beliebigen Gebieten 388
§ 4. Inhomogene Randbedingungen 393
§ 5. Der Fall eines hinreichend glatten Randes 394
§ 6. Elliptische Systeme 396

TEIL IV

NICHT STATIONÄRE GLEICHUNGEN

Kapitel 22. Die Wärmeleitungsgleichung 405

§ 1. Die Wärmeleitungsgleichung und ihre Charakteristiken 405
§ 2. Das Maximumprinzip 406
§ 3. Das Cauchysche Problem und das gemischte Problem 408
§ 4. Eindeutigkeitssätze 410
§ 5. Abstrakte Funktionen einer reellen Veränderlichen 412
§ 6. Die schwache Lösung des gemischten Problems 413

Kapitel 23. Die Wellengleichung 416

§ 1. Der Begriff der Wellengleichung 416
§ 2. Das gemischte Problem und seine schwache Lösung 417
§ 3. Die Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten. Das Cauchysche Problem. Der charakteristische Kegel 420
§ 4. Der Eindeutigkeitssatz für das Cauchysche Problem. Das Abhängigkeitsgebiet 421
§ 5. Die Erscheinung der Wellenausbreitung 424

Kapitel 24. Die Fouriersche Methode 426

§ 1. Die Fouriersche Methode für die Wärmeleitungsgleichung 426
§ 2. Die Begründung der Methode 427
§ 3. Die Korrektheit des gemischten Problems für die Wärmeleitungsgleichung . . 431
§ 4. Über die Stabilisierung der Lösung 432
§ 5. Über die Existenz der klassischen Lösung. Ein Spezialfall 434
§ 6. Der Fall des nicht selbstadjungierten elliptischen Teils 436
§ 7. Die Fouriersche Methode für die Wellengleichung 439
§ 8. Die Begründung der Methode für die homogene Gleichung 441
§ 9. Die Begründung der Methode für homogene Anfangsbedingungen 444
§ 10. Die Saitenschwingungsgleichung. Bedingungen für die Existenz der klassischen Lösung 445

Kapitel 25. Das Cauchysche Problem für die Wärmeleitungsgleichung 448

§ 1. Die Herleitung der Poissonschen Formel 448
§ 2. Eine andere Herleitung der Poissonschen Formel 451

§ 3. Die Begründung der POISSONschen Formel 454
§ 4. Die unendliche Geschwindigkeit der Wärmeübertragung 457

Kapitel 26. Das CAUCHYsche Problem für die Wellengleichung 458

§ 1. Die Anwendung der FOURIER-Transformation 458
§ 2. Die Anwendung der singulären Lösung 460
§ 3. Der Fall einer ungeraden Anzahl von Koordinaten. Die verallgemeinerte KIRCHHOFFsche Formel 464
§ 4. Die hintere Wellenfront 466
§ 5. Die Begründung der KIRCHHOFFschen Formel 468
§ 6. Der Fall einer geraden Anzahl von Koordinaten 470
§ 7. Die Saitenschwingungsgleichung 472
§ 8. Über die Korrektheit des CAUCHYschen Problems 473

Kapitel 27. Die Potentiale nicht stationärer Gleichungen 474

§ 1. Wärmepotentiale 474
§ 2. Die Integralgeichung der gemischten Probleme. Der Fall eines konvexen Randes 477
§ 3. Der Fall einer LJAPUNOW-Fläche 480
§ 4. Wellenpotentiale 484
§ 5. Grenzwertsätze für Wellenpotentiale 489
§ 6. Gemischte Probleme für den Halbraum 493

Kapitel 28. Das CAUCHYsche Problem für die Wellengleichung mit variablen Koeffizienten 495

§ 1. Die energetische Ungleichung und der Eindeutigkeitssatz 495
§ 2. Der Existenzsatz 500
§ 3. Über das CAUCHYsche Problem für hyperbolische Gleichungen 504

Literaturverzeichnis 512

Sachverzeichnis 516