

# Inhalt

## I Sobolevräume

§1	Bezeichnungen, Grundbegriffe, Distributionen . . . . .	11
1.1	Bezeichnungen . . . . .	11
1.2	Die Partition der Eins . . . . .	14
1.3	Die Regularisierung von Funktionen. . . . .	18
1.4	Distributionen . . . . .	20
1.5	Der Support einer Distribution . . . . .	22
1.6	Differentiation und Multiplikation. . . . .	24
1.7	Distributionen mit einem kompakten Träger. . . . .	28
1.8	Die Convolution . . . . .	30
1.9	Die Fouriertransformation . . . . .	35
§2	Geometrische Voraussetzungen an die Gebiete $\Omega$ . . . . .	44
2.1	Segment- und Kegeleigenschaften . . . . .	44
2.2	Die $N^{k,\kappa}$ -Eigenschaft von $\Omega$ . . . . .	46
2.3	$(k, \kappa)$ -Diffeomorphismen und $(k, \kappa)$ -glatte $\Omega$ 's . . . . .	53
2.4	Normale Transformationen . . . . .	59
2.5	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	64
§3	Definitionen und Dichteigenschaften der Sobolev-Slobodeckijschen Räume $W_2^1(\Omega)$ . . . . .	67
3.1	Definitionen der Sobolev-Slobodeckijschen Räume $W_2^1(\Omega)$ . . . . .	68
3.2	Dichteigenschaften . . . . .	70
§4	Der Transformationssatz und Sobolevräume auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten . . . . .	80
4.1	Der Transformationssatz. . . . .	80
4.2	Sobolevräume auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten . . . . .	92
§5	Die Definition der Sobolevschen Räume durch die Fouriertransformation und Fortsetzungssätze . . . . .	95
5.1	Sobolevräume und die Fouriertransformation . . . . .	95
5.2	Fortsetzungssätze. . . . .	100

§6	Stetige Einbettungen und das Lemma von Sobolev . . . . .	110
§7	Kompakte Einbettungen . . . . .	116
§8	Der Spuroperator . . . . .	124
§9	Die schwache Folgenkompaktheit und die Approximation der Ableitungen durch Differenzenquotienten . . . . .	136

## II Elliptische Differentialoperatoren

§10	Lineare Differentialoperatoren . . . . .	142
§11	Die Bedingung von Lopatinskij-Šapiro und Beispiele . . . . .	150
11.1	Die Bedingung von Lopatinskij-Šapiro . . . . .	151
11.2	Beispiele . . . . .	160
§12	Fredholmoperatoren . . . . .	167
12.1	Der Spektralsatz von Riesz-Schauder (kompakte Operatoren) . . . . .	167
12.2	Fredholmoperatoren . . . . .	170
12.3	A-priori-Abschätzungen, Weylsches Lemma und glättbare Operatoren . . . . .	181
§13	Der Hauptsatz und einige Sätze über den Index von elliptischen Randwertproblemen . . . . .	187
13.1	Der Hauptsatz für elliptische Randwertprobleme . . . . .	187
13.2	Index und Spektrum von elliptischen Randwertaufgaben . . . . .	208
§14	Die Greenschen Formeln . . . . .	213
14.1	Normale Randwertoperatoren und Dirichletsysteme . . . . .	214
14.2	Die erste Greensche Formel . . . . .	218
14.3	Adjungierte Randwertoperatoren und Randwerträume . . . . .	221
14.4	Die zweite Greensche Formel . . . . .	229
14.5	Der antiduale Operator $L'$ und die adjungierte Randwertaufgabe . . . . .	232
§15	Die adjungierte Randwertaufgabe und der Zusammenhang mit dem Bildraum des ursprünglichen Operators . . . . .	235
§16	Beispiele . . . . .	245

## III Stark elliptische Differentialoperatoren und die Variationsmethode

§17	Gelfandsche Dreier, der Satz von Lax-Milgram, $V$ -elliptische und $V$ -koerzive Operatoren . . . . .	253
-----	---	-----

17.1	Gelfandsche Dreier . . . . .	253
17.2	Darstellungen für Funktionale auf Sobolevräumen . . . . .	260
17.3	Der Satz von Lax-Milgram . . . . .	263
17.4	$V$ -elliptische und $V$ -koerzive Formen, Lösungssätze . . . . .	265
17.5	Der Greensche Operator . . . . .	267
17.6	Die Begriffe $V$ -elliptisch und $V$ -koerziv für Differentialoperatoren . . . . .	270
§18	Die Bedingung von Agmon. . . . .	271
§19	Der Satz von Agmon: Bedingungen für die $V$ -Koerzivität von stark elliptischen Differentialoperatoren . . . . .	281
19.1	Die Sätze von Gårding und Agmon. . . . .	281
19.2	Beispiele, u.a. das Dirichletproblem für stark elliptische Differentialoperatoren . . . . .	293
§20	Die Regularität der Lösungen von stark elliptischen Gleichungen . . . . .	298
§21	Der Lösungssatz für stark elliptische Gleichungen und Beispiele. . . . .	325
§22	Der Schaudersche Fixpunktsatz und eine nichtlineare Aufgabe . . . . .	349
§23	Elliptische Randwertaufgaben für unbeschränkte Gebiete . . . . .	358

#### IV Parabolische Differentialoperatoren

§24	Das Bochner-Integral. . . . .	364
24.1	Der Satz von Pettis . . . . .	364
24.2	Das Bochner-Integral . . . . .	372
§25	Distributionen mit Werten in Hilberträumen $H$ und der Raum $W(0, T)$ . . . . .	378
§26	Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer parabolischen Differentialgleichung. . . . .	383
§27	Die Regularität der Lösungen der parabolischen Differentialgleichung . . . . .	391
27.1	Ein abstrakter Regularitätssatz . . . . .	391
27.2	Differenzierbarkeit nach $t$ . . . . .	398
27.3	Differenzierbarkeit nach $x$ . . . . .	401
§28	Beispiele . . . . .	409

#### V Hyperbolische Differentialoperatoren

§29	Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	419
§30	Die Regularität der Lösungen der hyperbolischen Differentialgleichung . . . . .	427

30.1 Ein abstrakter Regularitätssatz . . . . .	427
30.2 Differenzierbarkeit nach $t$ . . . . .	429
30.3 Differenzierbarkeit nach $x$ . . . . .	431

§31 Beispiele . . . . .	436
-------------------------	-----

## VI Differenzenverfahren zur Berechnung der Lösung einer partiellen Differentialgleichung

§32 Der funktionalanalytische Rahmen für Differenzenverfahren. . . . .	446
--	-----

§33 Differenzenverfahren für elliptische Differentialgleichungen und für die Wellengleichung. . . . .	464
---	-----

33.1 Einige wichtige Ungleichungen . . . . .	464
--	-----

33.2 Konstruktion eines Differenzenverfahrens für das Dirichletproblem. . . . .	467
---	-----

33.3 Ein Differenzenverfahren für die Wellengleichung in mehreren Raumvariablen . . . . .	471
---	-----

§34 Evolutionsgleichungen . . . . .	478
-------------------------------------	-----

34.1 Der zeitunabhängige Fall . . . . .	480
---	-----

34.2 Der zeitabhängige Fall . . . . .	484
---------------------------------------	-----

34.3 Das Verhalten der Stabilität bei Störungen des Verfahrens . . . . .	486
--	-----

34.4 Mehrschrittverfahren . . . . .	489
-------------------------------------	-----

<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	492
---------------------------------------	-----

<b>Funktions- und Distributionsräume</b> . . . . .	496
--	-----

<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	497
----------------------------------	-----