

## SOMMAIRE

Introduction.....	IX
-------------------	----

### Chapitre I

#### Généralités sur les systèmes dynamiques.

I-0) Les fondements de la géométrie sur les variétés.....	1
I-1) Champs de vecteurs, flots et difféomorphismes, k-formes différentielles.....	5
I-2) Point critique, valeur critique et théorème de Sard.....	11
I-3) Singularité et orbite périodique.....	12
I-4) Mise en position générale des orbites périodiques; le théorème de transversalité de Thom et la récurrence de Peixoto.....	16
I-5) Champs de vecteurs hamiltoniens, difféomorphismes et variétés symplectiques.....	21
I-6) Champs de vecteurs isochores et formes volumes.....	25
I-7) Intégrabilité et paire de Lax pour un champ de vecteurs.....	27
I-8) Le closing lemma de Pugh.....	29
I-9) La croissance du nombre des orbites périodiques.....	30
I-10) La stabilité au sens de Lyapunov et le théorème de Lagrange...	34
I-11) La théorie des bifurcations, le théorème de la variété centrale, la bifurcation col-nœud.....	36

### Chapitre II

**Singularité d'une fonction. Singularité résiduelle et conjugaison Nash. Classification simultanée des fonctions et des formes volumes. Forme normale d'un champ de vecteurs. Forme locale d'un difféomorphisme au voisinage d'un point fixe.**

II-0) Les fondements de la géométrie analytique.....	39
II-1) Introduction et notations.....	43

II-2)	Singularités de fonctions.....	47
	-Le lemme de Morse et le théorème de Mather.....	48
	-Singularité résiduelle et décomposition en paquets de Thom...	50
	-Exemple de singularités de fonctions : les sept catastrophes élémentaires.....	51
	-Conjugaison de fonctions dans la classe de Nash.....	52
	-Classification simultanée de fonctions et de formes vo- lumes.....	58
II-3)	Singularités des champs de vecteurs.....	73
	-L'action de $\text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$ sur les champs de vecteurs au niveau du jet d'ordre un.....	73
	-La linéarisation formelle au niveau du jet d'ordre quel- conque, notion de résonance.....	74
	-La linéarisation analytique, notion de petits diviseurs.....	77
	-Forme normale d'un champ de vecteurs.....	85
	-Etude des champs isochores.....	90
	-Application de la théorie des formes normales : la bifur- cation de Hopf.....	99
II-4)	Forme normale et linéarisation des difféomorphismes.....	100
	-Interpolation d'un difféomorphisme formel par un flot et forme normale d'un difféomorphisme.....	100
	-Linéarisation d'un champ de vecteurs et d'un difféomor- phisme pour le cas de la singularité hyperbolique, les théo- rèmes de Grobman et Hartman.....	102

### Chapitre III

**Les orbites périodiques d'une transformation symplec-  
tique au voisinage d'un point fixe elliptique générique  
ou d'une Lagrangienne invariante. Perturbation expli-  
cite pour rendre les points périodiques élémen-  
taires. Obstructions à l'intégrabilité.**

III-1)	Introduction.....	103
III-2)	Passage au complexe et majorations par la méthode de Cauchy.....	107
III-3)	Fonction génératrice et points périodiques.....	118

III-4) Propriétés de généralité et discrétisation de l'équation de Hamilton-Jacobi.....	128
III-5) Comparaison entre l'interpolation formelle et l'interpolation analytique d'un difféomorphisme par un flot.....	143
III-6) Points périodiques d'un difféomorphisme symplectique au voisinage d'une Lagrangienne compacte.....	145

## Chapitre IV

### Intégrabilité au sens de Liouville, action-angles.

IV-1) Intégrabilité au sens de Liouville .....	149
IV-2) Le calcul des actions pour les systèmes Hamiltoniens algébriquement intégrables.....	155
IV-3) Applications à l'étude de systèmes particuliers : le cas de S. Kowalevska pour le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.....	164
IV-4) Classification relative des formes symplectiques au voisinage d'une fibre lisse d'un système intégrable.....	168

## Chapitre V

### Exemples de systèmes à orbites toutes périodiques, les systèmes de Calogero-Moser.

V-0) Action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique, application moment et réduction symplectique.....	175
V-1) Le système harmonique sur le cotangent d'une algèbre de Lie semi-simple.....	178
V-2) Le système de Calogero-Moser avec un potentiel extérieur quadratique.....	183
V-3) Un exemple de système intégrable au sens de Liouville : Hamiltonien de Calogero-Moser avec potentiel extérieur quartique.....	188
V-4) Extensions aux systèmes d'Olshanetski-Perelomov.....	193

## Chapitre VI

Les orbites périodiques des champs de vecteurs du plan et le 16<sup>e</sup> problème de Hilbert.

VI-1) Introduction au problème de Dulac sur les cycles limites .....	198
VI-2) Le problème du centre.....	205
-La méthode de Bautin.....	206
-La méthode de la série de Lyapunov-Poincaré .....	206
-L'algorithme des dérivées successives, application : les conditions de Dulac pour un centre quadratique.....	209
VI-3) Le 16 <sup>e</sup> problème de Hilbert local .....	215
VI-4) Le 16 <sup>e</sup> problème de Hilbert avec contrôle de la période .....	220
VI-5) Stratégie d'attaque du 16 <sup>e</sup> problème de Hilbert, la conjecture de la cyclicité .....	226
<b>Références</b> .....	229
<b>Index</b> .....	245