Table des Matières

Prologue 7

I Généralités **11**

0 En Guise d'Introduction : Arthur, Béatrice et Clotilde 13

1 Itérations sur un Ensemble Fini 18

1.1 Généralités 18

1.2 Exemples 20

1.3 Puissances successives de F 25

1.4 F simple 28

1.5 Annexe : l'itération de Collatz 29

2 Réseaux d'automates : Dynamique de Base 31

2.1 Le modèle réseau d'automates 31

2.2 Itération parallèle 33

2.3 Réflexions sur le modèle "réseau d'automates" 37

2.4 Mode opératoire série et opérateur de Gauss-Seidel 37

2.5 Modes opératoires série-parallèle et opérateurs associés 44

2.6 Exemples 47

2.7 Remarques et Conclusions 49

II Boîte à Outils 51

3 Un Outil Métrique 53

3.1 La distance vectorielle booléenne d 54

3.2 Des inégalités de base 55

3.3 Premières Applications 57

3.4 Compléments : opérateurs série-parallèle 62

3.5 Autres outils métriques possibles 66

3.6 Conclusions 68

4 Théorèmes de Perron-Frobenius et Stein-Rosenberg Booléens 69

4.1 Eléments propres d'une matrice booléenne 69

4.2 Théorème de Perron-Frobenius booléen 77

4.3 Théorèmes de Stein-Rosenberg booléens 80

4.4 Conclusions 82

III Applications 83

5 Contraction Booléenne et Convergence Globale 85

5.1 Contraction booléenne 86

5.2 Théorème de point fixe 87

5.3 Exemples 91

5.4 Mode série : Itération de Gauss-Seidel pour un opérateur contractant . . . 95

5.5 Exemples 96

5.6 Comparaison des modes opératoires pour un opérateur contractant 98

5.7 Exemples 99

5.8 Complément : Gauss-Seidelisations successives 106

5.9 Complément : diagramme contraction-simplicité 108

5.10 Conclusions 111

6 Comparaison de Modes Opératoires 112

6.1 Comparaison des modes opératoires série et parallèle 113

6.2 Exemples 122

6.3 Extension à la comparaison de deux modes opératoires série-parallèle . . . 124

6.4 Exemples 125

6.5 Conclusions 127

7 Dérivée Discrète et Convergence Locale 128

7.1 Dérivée discrète 128

7.2 Dérivée discrète et distance vectorielle 132

7.3 Application : opérateur affine sur $(\mathbb{Z}/2)^n$ 138

7.4 Application. Caractérisation de la convergence locale dans le voisinage premier d'un point fixe 140

7.5 Interprétation en termes de réseaux d'automates 144

7.6 Gauss-Seidel 145

7.7 Dérivation d'un produit de composition 147

7.8 Conclusions 147

8 Dérivée Discrète d'un Produit de Composition 149

8.1 Un problème de dérivation discrète 149

8.2 Formules de dérivation d'un produit de composition 150

8.3 Application à la notion de cycle attractif 153

8.4 Interprétation en termes de réseaux d'automates 160

8.5 Conclusions 161

9 Attraction Locale dans le Voisinage Premier ou Second d'un Point Fixe 162

9.1 Définitions, rappels 162

9.2 Attraction dans $V_1(\xi)$ 164

9.3 Attraction dans $V_2(\xi)$ 169

9.4 Forte attraction dans $V_2(\xi)$ 174

9.5 Cas d'un opérateur affine sur $(\mathbb{Z}/2)^n$ 178

9.6 Conclusions 181

10 Attraction dans un Voisinage Massif d'un Point Fixe 183

10.1 Voisinage massif d'un élément du n-cube $\{0,1\}^n$ 183

10.2 Caractérisation de la notion de voisinage massif 185

10.3 Application : convergence locale dans un voisinage massif 187

10.4 Conclusions 193

11 Attraction Locale pour l'Opérateur Série 194

11.1 Cadre continu : $\mathbb{R}^n$ 195

11.2 Cadre discret : $\{0,1\}^n$ 199

11.3 Une majoration utile de $G'(\xi)$ 202

11.4 Exemples 206

11.5 Retour au problème posé : un résultat technique 208

11.6 Exemples 210

11.7 Point fixe attractif en mode parallèle *et* série 211

11.8 Application à l'attractivité globale 214

11.9 Remarques finales 215

12 Réseaux d'Automates à Seuils et Applications 217

12.1 Automates à seuil 217

12.2 Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^n$ 218

12.3 Cas particulier : Fonctions majorité 220

12.4 Réseaux d'automates à seuils 220

12.5 Deux formulations équivalentes pour des réseaux à seuils 223
12.6 Dynamiques parallèle et série d'un réseau à seuils symétrique 224
12.7 Exemples 227
12.8 Modèle de Hopfield (réalisation d'une mémoire associative) 232
12.9 Exemple 234
12.10 Conclusions 239

13 Itérations Chaotiques Discrètes et Réseaux d'Automates 240
13.1 Itérations discrètes asynchrones 241
13.2 Itérations discrètes chaotiques 241
13.3 Remarques importantes 242
13.4 Analyse de l'évolution d'une itération chaotique discrète 244
13.5 Comportement local d'une itération chaotique à partir de la dérivée 246
13.6 Résultats spécifiques sur les matrices booléennes 250
13.7 Convergence locale d'une itération chaotique discrète 255
13.8 Convergence globale d'une itération chaotique discrète 260
13.9 Additif 264
13.10 Conclusions 270

14 En Guise de Conclusion : Arthur, Béatrice et Clotilde revisités 271

IV Sujets de Problèmes **277**

Bibliographie 293

Index 295

Les Chapitres 2 à 7 et 10 constituent une version française, revue et complétée, des Chapitres correspondants de "Discrete Iterations", Springer-Verlag, 1986, référence [26].