

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Kapitel I Grundlagen	
1 Logische Grundbegriffe	3
2 Mengen	9
Elementare Tatsachen	9
Die Potenzmenge	10
Komplemente, Durchschnitte und Vereinigungen	10
Produkte	11
Mengensysteme	13
3 Abbildungen	16
Einfache Beispiele	17
Die Komposition von Abbildungen	18
Kommutative Diagramme	19
Injektionen, Surjektionen und Bijektionen	20
Umkehrabbildungen	20
Mengenabbildungen	21
4 Relationen und Verknüpfungen	24
Äquivalenzrelationen	24
Ordnungsrelationen	26
Verknüpfungen	28
5 Die natürlichen Zahlen	32
Die Peano-Axiome	32
Rechenregeln	34
Der euklidische Algorithmus	38
Das Induktionsprinzip	39
Rekursive Definitionen	43

6	Abzählbarkeit	50
	Permutationen	51
	Der Mächtigkeitsbegriff	51
	Abzählbare Mengen	52
	Unendliche Produkte	54
7	Gruppen und Homomorphismen	56
	Gruppen	57
	Untergruppen	59
	Restklassen	59
	Homomorphismen	61
	Isomorphismen	63
8	Ringe, Körper und Polynome	67
	Ringe	67
	Der binomische Satz	70
	Multinomialformeln	71
	Körper	73
	Angeordnete Körper	74
	Formale Potenzreihen	77
	Polynome	78
	Polynomiale Funktionen	80
	Division mit Rest	82
	Linearfaktoren	83
	Polynome in mehreren Unbestimmten	84
9	Die rationalen Zahlen	90
	Die ganzen Zahlen	90
	Die rationalen Zahlen	92
	Rationale Nullstellen von Polynomen	94
	Quadratwurzeln	95
10	Die reellen Zahlen	98
	Die Ordnungsvollständigkeit	98
	Die Dedekindsche Konstruktion der reellen Zahlen	99
	Die natürliche Ordnung von \mathbb{R}	101
	Die erweiterte Zahlengerade	102
	Eine Charakterisierung von Supremum und Infimum	102
	Der Satz von Archimedes	103
	Die Dichtheit der rationalen Zahlen in \mathbb{R}	103
	n -te Wurzeln	104
	Die Dichtheit der irrationalen Zahlen in \mathbb{R}	106
	Intervalle	107

11 Die komplexen Zahlen	110
Eine Konstruktion der komplexen Zahlen	110
Elementare Eigenschaften	111
Rechenregeln	114
Bälle in \mathbb{K}	116
12 Vektorräume, affine Räume und Algebren	119
Vektorräume	119
Lineare Abbildungen	120
Vektorraumbasen	123
Affine Räume	125
Affine Abbildungen	128
Polynominterpolation	129
Algebren	131
Differenzenoperatoren und Summenformeln	132
Newtonsche Interpolationspolynome	133

Kapitel II Konvergenz

1 Konvergenz von Folgen	141
Folgen	141
Metrische Räume	142
Häufungspunkte	145
Konvergenz	145
Beschränkte Mengen	147
Eindeutigkeitsaussagen	148
Teilfolgen	148
2 Das Rechnen mit Zahlenfolgen	152
Nullfolgen	152
Elementare Rechenregeln	152
Vergleichssätze	155
Folgen komplexer Zahlen	155
3 Normierte Vektorräume	160
Normen	160
Bälle	161
Beschränkte Mengen	162
Beispiele	162
Räume beschränkter Abbildungen	163
Innenprodukträume	165
Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung	167
Euklidische Räume	169
Äquivalente Normen	170
Konvergenz in Produkträumen	172

4	Monotone Folgen	175
	Beschränkte monotone Folgen	175
	Einige wichtige Grenzwerte	176
5	Uneigentliche Konvergenz	181
	Die Konvergenz gegen $\pm\infty$	181
	Limes superior und Limes inferior	182
	Der Satz von Bolzano-Weierstraß	184
6	Vollständigkeit	187
	Cauchyfolgen	187
	Banachräume	188
	Die Cantorsche Konstruktion der reellen Zahlen	190
7	Reihen	195
	Konvergenz von Reihen	195
	Die harmonische und die geometrische Reihe	196
	Rechenregeln	197
	Konvergenzkriterien	197
	Alternierende Reihen	198
	g -al-Entwicklungen	200
	Die Überabzählbarkeit von \mathbb{R}	204
8	Absolute Konvergenz	207
	Majoranten-, Wurzel- und Quotientenkriterium	208
	Die Exponentialfunktion	211
	Umordnungen von Reihen	211
	Doppelreihen	213
	Cauchyprodukte	216
9	Potenzreihen	222
	Der Konvergenzradius	223
	Rechenregeln	225
	Der Identitätssatz für Potenzreihen	226

Kapitel III Stetige Funktionen

1	Stetigkeit	231
	Elementare Eigenschaften und Beispiele	231
	Folgenstetigkeit	236
	Rechenregeln	237
	Einseitige Stetigkeit	240

2	Topologische Grundbegriffe	245
	Offene Mengen	245
	Abgeschlossene Mengen	246
	Die abgeschlossene Hülle	248
	Der offene Kern	250
	Der Rand einer Menge	251
	Die Hausdorffeigenschaft	251
	Beispiele	252
	Eine Charakterisierung stetiger Abbildungen	253
	Stetige Ergänzungen	255
	Relativtopologien	257
	Allgemeine topologische Räume	259
3	Kompaktheit	264
	Die Überdeckungseigenschaft	264
	Eine Charakterisierung kompakter Mengen	265
	Folgenkompaktheit	266
	Stetige Abbildungen auf kompakten Räumen	267
	Der Satz vom Minimum und Maximum	267
	Totalbeschränktheit	271
	Gleichmäßige Stetigkeit	272
	Kompaktheit in allgemeinen topologischen Räumen	273
4	Zusammenhang	277
	Charakterisierung des Zusammenhanges	277
	Zusammenhang in \mathbb{R}	278
	Der allgemeine Zwischenwertsatz	279
	Wegzusammenhang	280
	Zusammenhang in allgemeinen topologischen Räumen	283
5	Funktionen in \mathbb{R}	285
	Der Zwischenwertsatz von Bolzano	285
	Monotone Funktionen	286
	Stetige monotone Funktionen	288
6	Die Exponentialfunktion und Verwandte	291
	Die Eulersche Formel	291
	Die reelle Exponentialfunktion	294
	Der Logarithmus und die allgemeine Potenz	295
	Die Exponentialfunktion auf $i\mathbb{R}$	297
	Die Definition von π und Folgerungen	300
	Tangens und Cotangens	304
	Das Abbildungsverhalten der Exponentialfunktion	305
	Ebene Polarkoordinaten	306

Der komplexe Logarithmus	308
Komplexe Potenzen	309
Eine weitere Darstellung der Exponentialfunktion	310

Kapitel IV Differentialrechnung in einer Variablen

1 Differenzierbarkeit	317
Die Definition	317
Lineare Approximierbarkeit	318
Rechenregeln	320
Kettenregel	321
Umkehrfunktionen	322
Differenzierbare Abbildungen	323
Höhere Ableitungen	323
Einseitige Differenzierbarkeit	329
2 Mittelwertsätze und ihre Anwendungen	333
Extremalstellen	333
Der erste Mittelwertsatz	334
Monotonie und Differenzierbarkeit	335
Konvexität und Differenzierbarkeit	338
Die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski	342
Der Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen	344
Der zweite Mittelwertsatz	345
Die Regeln von de l'Hospital	346
3 Taylorsche Formeln	352
Landausche Symbole	352
Die Taylorsche Formel	353
Taylorpolynome, Taylorreihe und Restglied	355
Restglieddarstellungen im reellen Fall und Anwendungen	357
Polynomiale Interpolation	362
Differenzenquotienten höherer Ordnung	363
4 Iterationsverfahren	368
Fixpunkte und Kontraktionen	368
Der Banachsche Fixpunktsatz	369
Das Newtonverfahren	373

Kapitel V Funktionenfolgen

1	Gleichmäßige Konvergenz	381
	Punktweise konvergente Folgen	381
	Gleichmäßig konvergente Folgen	382
	Funktionsreihen	384
	Das Weierstraßsche Majorantenkriterium	386
2	Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen	389
	Stetigkeit	389
	Lokal gleichmäßige Konvergenz	389
	Der Banachraum der beschränkten und stetigen Funktionen	391
	Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen	392
3	Analytische Funktionen	396
	Differenzierbarkeit von Potenzreihen	396
	Analytizität	397
	Stammfunktionen analytischer Funktionen	399
	Die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus	401
	Die Binomialreihe	401
	Der Identitätssatz für analytische Funktionen	406
4	Polynomiale Approximation	410
	Banachalgebren	410
	Dichtheit und Separabilität	411
	Der Satz von Stone und Weierstraß	413
	Trigonometrische Polynome	417
	Periodische Funktionen	419
	Der trigonometrische Approximationssatz	421
	Anhang Einführung in die Schlußlehre	425
	Literaturverzeichnis	431
	Index	433