

# TABLE DES MATIÈRES

Préface à l'édition anglaise . . . . .	1
Préface à l'édition française . . . . .	2

## PREMIÈRE PARTIE

### THÉORIE DES ENSEMBLES

Introduction à la première partie . . . . .	5
---	---

#### I. CALCUL PROPOSITIONNEL

§ 1. La disjonction et la conjonction des propositions . . . . .	11
§ 2. La négation . . . . .	12
§ 3. L'implication . . . . .	13
Exercices . . . . .	14

#### II. ALGÈBRE DES ENSEMBLES. OPÉRATIONS FINIES

§ 1. Opérations sur les ensembles . . . . .	15
§ 2. Relation avec le calcul propositionnel . . . . .	16
§ 3. L'inclusion . . . . .	17
§ 4. Espace. Complémentaire d'un ensemble . . . . .	19
§ 5. L'axiomatique de l'algèbre des ensembles . . . . .	21
§ 6. L'algèbre de Boole . . . . .	22
Exercices . . . . .	24

#### III. FONCTIONS PROPOSITIONNELLES. PRODUITS CARTÉSIENS

§ 1. L'opération $\{x: \varphi(x)\}$ . . . . .	26
§ 2. Les quantificateurs . . . . .	27
§ 3. Couples ordonnés . . . . .	29
§ 4. Produit cartésien . . . . .	30
§ 5. Fonctions propositionnelles de deux variables . . . . .	31
§ 6. Produit cartésien de $n$ ensembles. Fonctions propositionnelles de $n$ variables . . . . .	33

## VI THÉORIE DES ENSEMBLES ET TOPOLOGIE

§ 7. Idéaux et filtres . . . . .	34
§ 8. Remarques sur les axiomes . . . . .	35
Exercices . . . . .	36

### IV. LA NOTION DE FONCTION. LES OPÉRATIONS INFINIES

§ 1. La notion de fonction . . . . .	38
§ 2. Opérations généralisées . . . . .	39
§ 3. La fonction $F_x = \{y: \varphi(x, y)\}$ . . . . .	41
§ 4. Images et images réciproques déterminées par une fonction . . . . .	42
§ 5. Les opérations $S(\mathbf{R})$ et $P(\mathbf{R})$ . . . . .	43
§ 6. Familles d'ensembles additives et multiplicatives . . . . .	44
§ 7. Familles boréliennes . . . . .	46
§ 8. Produit cartésien généralisé . . . . .	47
Exercices . . . . .	48

### V. LA NOTION DE PUISSANCE D'UN ENSEMBLE. ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

§ 1. Fonctions biunivoques . . . . .	52
§ 2. Ensembles équipotents . . . . .	54
§ 3. Ensembles dénombrables . . . . .	55
Exercices . . . . .	59

### VI. OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES CARDINAUX. LES NOMBRES $\aleph$ ET $\mathfrak{c}$

§ 1. Addition et multiplication . . . . .	61
§ 2. Exponentiation . . . . .	63
§ 3. Inégalités entre nombres cardinaux . . . . .	67
§ 4. Propriétés du nombre $\mathfrak{c}$ . . . . .	70
Exercices . . . . .	73

### VII. RELATIONS D'ORDRE

§ 1. Définitions . . . . .	74
§ 2. Similitude. Types d'ordre . . . . .	74
§ 3. Ordre dense . . . . .	76
§ 4. Ordre continu . . . . .	76
§ 5. Systèmes inverses. Limites inverses . . . . .	77
Exercices . . . . .	79

## VIII. LE BON ORDRE

§ 1. Le bon ordre . . . . .	81
§ 2. Théorème sur l'induction transfinie . . . . .	82
§ 3. Théorème sur la comparaison des nombres ordinaux . . . . .	82
§ 4. Ensembles de nombres ordinaux . . . . .	85
§ 5. Le nombre $\Omega$ . . . . .	86
§ 6. L'arithmétique des nombres ordinaux . . . . .	88
§ 7. Théorème sur la possibilité de bien ordonner un ensemble quelconque	90
Exercices . . . . .	95

## DEUXIÈME PARTIE

## TOPOLOGIE

Introduction à la deuxième partie . . . . .	97
---	----

## IX. ESPACES MÉTRIQUES. ESPACES EUCLIDIENS

§ 1. Espaces métriques . . . . .	103
§ 2. Diamètre d'un ensemble. Espaces bornés. Applications bornées . .	104
§ 3. Le cube de Hilbert. . . . .	105
§ 4. Convergence d'une suite de points . . . . .	105
§ 5. Propriétés de la limite . . . . .	106
§ 6. Limite dans le produit cartésien . . . . .	107
§ 7. Convergence uniforme . . . . .	109
Exercices . . . . .	110

## X. ESPACES TOPOLOGIQUES

§ 1. Définition. Axiomes de la fermeture . . . . .	111
§ 2. Rapports avec les espaces métriques . . . . .	111
§ 3. Propriétés algébriques de la fermeture. . . . .	113
§ 4. Ensembles fermés. Ensembles ouverts . . . . .	114
§ 5. Opérations sur les ensembles fermés et les ensembles ouverts . . .	115
§ 6. Points intérieurs . . . . .	117
§ 7. Définition de l'espace topologique à partir de la notion d'ensemble ouvert . . . . .	118
§ 8. Base et sous-base de l'espace. . . . .	119
§ 9. Topologie relativisée aux sous-ensembles d'un espace topologique .	120
§ 10. Comparaison de topologies . . . . .	120
Exercices . . . . .	121

## XI. DIVERSES FAMILLES D'ENSEMBLES. L'ENSEMBLE DÉRIVÉ

§ 1. Ensembles boréliens . . . . .	124
§ 2. Ensembles denses. Ensembles frontières . . . . .	125
§ 3. Espace $\mathcal{T}_1$ . Espaces $\mathcal{T}_2$ . . . . .	126
§ 4. Points d'accumulation. Points isolés. . . . .	127
§ 5. Ensemble dérivé . . . . .	127
§ 6. Ensembles denses en soi. . . . .	128
Exercices . . . . .	129

## XII. APPLICATIONS CONTINUES

§ 1. Continuité . . . . .	131
§ 2. Cas des espaces métriques . . . . .	133
§ 3. Distance d'un point à un ensemble. Extension des fonctions continues . . . . .	137
§ 4. Espaces normaux. Généralisation du théorème de Tietze . . . . .	144
§ 5. Espaces complètement réguliers . . . . .	147
§ 6. Homéomorphismes . . . . .	148
§ 7. Exemples d'homéomorphisme. . . . .	150
Exercices . . . . .	152

## XIII. PRODUITS CARTÉSIENS

§ 1. Produit cartésien de deux espaces topologiques . . . . .	155
§ 2. Applications continues . . . . .	155
§ 3. Invariants de la multiplication cartésienne . . . . .	157
§ 4. Diagonale. Graphe d'une fonction . . . . .	158
§ 5. Produits cartésiens généralisés . . . . .	159
§ 6. $X^T$ comme espace topologique. Le cube $\mathcal{I}^T$ . . . . .	160
§ 7. Produits cartésiens d'espaces métriques . . . . .	163
Exercices . . . . .	164

## XIV. ESPACES À BASE DÉNOMBRABLE

§ 1. Propriétés générales . . . . .	167
§ 2. Espaces séparables . . . . .	168
§ 3. Problèmes de puissance . . . . .	169
§ 4. Plongement dans le cube de Hilbert . . . . .	171
§ 5. Points de condensation. Le théorème de Cantor-Bendixson . . . . .	173
Exercices . . . . .	174

## XV. ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

§ 1. Espaces métriques complets . . . . .	177
§ 2. Le théorème de Cantor . . . . .	178
§ 3. Le théorème de Baire . . . . .	178
§ 4. Extension d'un espace métrique à un espace complet . . . . .	180
Exercices . . . . .	181

## XVI. ESPACES COMPACTS

§ 1. Définition . . . . .	183
§ 2. Propriétés fondamentales . . . . .	183
§ 3. Produits cartésiens. Théorème de Tychonoff . . . . .	185
§ 4. Compactification (de Čech-Stone) des espaces complètement réguliers . . . . .	187
§ 5. Espaces compacts métriques . . . . .	189
§ 6. Topologie de convergence uniforme de $Y^X$ . . . . .	200
§ 7. Topologie compacte ouverte . . . . .	201
§ 8. Discontinu de Cantor . . . . .	203
§ 9. Applications continues du discontinu de Cantor . . . . .	205
Exercices . . . . .	209

## XVII. CONNEXITÉ

§ 1. Définition. Ensembles séparés . . . . .	216
§ 2. Propriétés des espaces connexes . . . . .	218
§ 3. Composantes . . . . .	223
§ 4. Produits cartésiens d'espaces connexes . . . . .	224
§ 5. Les continus . . . . .	225
§ 6. Propriétés des continus . . . . .	226
Exercices . . . . .	231

## XVIII. CONNEXITÉ LOCALE

§ 1. Définitions et exemples . . . . .	234
§ 2. Propriétés des espaces localement connexes . . . . .	234
§ 3. Arcs. Connexité par arcs . . . . .	236
§ 4. Continus localement connexes . . . . .	238
Exercices . . . . .	243

## XIX. NOTION DE DIMENSION

§ 1. Ensembles de dimension 0 . . . . .	245
§ 2. Propriétés des ensembles de dimension 0 . . . . .	246

§ 3. Espaces à $n$ dimensions . . . . .	246
§ 4. Propriétés des espaces à $n$ dimensions . . . . .	248
Exercices . . . . .	250

## XX. LES SIMPLEXES ET LEURS PROPRIÉTÉS

§ 1. Les simplexes . . . . .	251
§ 2. La subdivision simpliciale . . . . .	252
§ 3. Dimension d'un simplexe . . . . .	254
§ 4. Le théorème du point fixe . . . . .	256
Exercices . . . . .	260

## XXI. COMPLEXES. CHAÎNES. HOMOLOGIES

§ 1. Groupes abéliens . . . . .	262
§ 2. Simplexes orientés. Chaînes . . . . .	264
§ 3. Le bord d'une chaîne. Cycles . . . . .	266
§ 4. Groupes d'homologie . . . . .	267
§ 5. Nombres de Betti . . . . .	269
§ 6. Groupes de cohomologies . . . . .	270
Exercices . . . . .	271

## XXII. COUPURES DU PLAN

§ 1. Propriétés auxiliaires des lignes polygonales . . . . .	278
§ 2. Coupures . . . . .	279
§ 3. Fonctions complexes qui ne s'annulent nulle part. Existence du logarithme . . . . .	280
§ 4. Théorèmes auxiliaires . . . . .	281
§ 5. Corollaires des théorèmes auxiliaires . . . . .	285
§ 6. Théorèmes sur les coupures du plan . . . . .	287
§ 7. Théorèmes de Janiszewski . . . . .	289
§ 8. Théorème de Jordan . . . . .	290
Exercices . . . . .	294

LISTE DES SYMBOLES IMPORTANTS . . . . .	297
---	-----

INDEX . . . . .	298
-----------------	-----