

TABLE DES MATIÈRES

Préface à l'édition anglaise	1
Préface à l'édition française	2

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE DES ENSEMBLES

Introduction à la première partie	5
---	---

I. CALCUL PROPOSITIONNEL

§ 1. La disjonction et la conjonction des propositions	11
§ 2. La négation	12
§ 3. L'implication	13
Exercices	14

II. ALGÈBRE DES ENSEMBLES. OPÉRATIONS FINIES

§ 1. Opérations sur les ensembles	15
§ 2. Relation avec le calcul propositionnel	16
§ 3. L'inclusion	17
§ 4. Espace. Complémentaire d'un ensemble	19
§ 5. L'axiomatique de l'algèbre des ensembles	21
§ 6. L'algèbre de Boole	22
Exercices	24

III. FONCTIONS PROPOSITIONNELLES. PRODUITS CARTÉSIENS

§ 1. L'opération $\{x: \varphi(x)\}$	26
§ 2. Les quantificateurs	27
§ 3. Couples ordonnés	29
§ 4. Produit cartésien	30
§ 5. Fonctions propositionnelles de deux variables	31
§ 6. Produit cartésien de n ensembles. Fonctions propositionnelles de n variables	33

VI THÉORIE DES ENSEMBLES ET TOPOLOGIE

§ 7. Idéaux et filtres	34
§ 8. Remarques sur les axiomes	35
Exercices	36

IV. LA NOTION DE FONCTION.
LES OPÉRATIONS INFINIES

§ 1. La notion de fonction	38
§ 2. Opérations généralisées	39
§ 3. La fonction $F_x = \{y: \varphi(x, y)\}$	41
§ 4. Images et images réciproques déterminées par une fonction	42
§ 5. Les opérations $S(\mathbf{R})$ et $P(\mathbf{R})$	43
§ 6. Familles d'ensembles additives et multiplicatives	44
§ 7. Familles boréliennes	46
§ 8. Produit cartésien généralisé	47
Exercices	48

V. LA NOTION DE PUISSANCE D'UN ENSEMBLE.
ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

§ 1. Fonctions biunivoques	52
§ 2. Ensembles équipotents	54
§ 3. Ensembles dénombrables	55
Exercices	59

VI. OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES CARDINAUX.
LES NOMBRES \aleph ET \mathfrak{c}

§ 1. Addition et multiplication	61
§ 2. Exponentiation	63
§ 3. Inégalités entre nombres cardinaux	67
§ 4. Propriétés du nombre \mathfrak{c}	70
Exercices	73

VII. RELATIONS D'ORDRE

§ 1. Définitions	74
§ 2. Similitude. Types d'ordre	74
§ 3. Ordre dense	76
§ 4. Ordre continu	76
§ 5. Systèmes inverses. Limites inverses	77
Exercices	79

VIII. LE BON ORDRE

§ 1. Le bon ordre	81
§ 2. Théorème sur l'induction transfinie	82
§ 3. Théorème sur la comparaison des nombres ordinaux	82
§ 4. Ensembles de nombres ordinaux	85
§ 5. Le nombre Ω	86
§ 6. L'arithmétique des nombres ordinaux	88
§ 7. Théorème sur la possibilité de bien ordonner un ensemble quelconque	90
Exercices	95

DEUXIÈME PARTIE

TOPOLOGIE

Introduction à la deuxième partie	97
---	----

IX. ESPACES MÉTRIQUES. ESPACES EUCLIDIENS

§ 1. Espaces métriques	103
§ 2. Diamètre d'un ensemble. Espaces bornés. Applications bornées . .	104
§ 3. Le cube de Hilbert.	105
§ 4. Convergence d'une suite de points	105
§ 5. Propriétés de la limite	106
§ 6. Limite dans le produit cartésien	107
§ 7. Convergence uniforme	109
Exercices	110

X. ESPACES TOPOLOGIQUES

§ 1. Définition. Axiomes de la fermeture	111
§ 2. Rapports avec les espaces métriques	111
§ 3. Propriétés algébriques de la fermeture.	113
§ 4. Ensembles fermés. Ensembles ouverts	114
§ 5. Opérations sur les ensembles fermés et les ensembles ouverts . . .	115
§ 6. Points intérieurs	117
§ 7. Définition de l'espace topologique à partir de la notion d'ensemble ouvert	118
§ 8. Base et sous-base de l'espace.	119
§ 9. Topologie relativisée aux sous-ensembles d'un espace topologique .	120
§ 10. Comparaison de topologies	120
Exercices	121

XI. DIVERSES FAMILLES D'ENSEMBLES. L'ENSEMBLE DÉRIVÉ

§ 1. Ensembles boréliens	124
§ 2. Ensembles denses. Ensembles frontières	125
§ 3. Espace \mathcal{T}_1 . Espaces \mathcal{T}_2	126
§ 4. Points d'accumulation. Points isolés.	127
§ 5. Ensemble dérivé	127
§ 6. Ensembles denses en soi.	128
Exercices	129

XII. APPLICATIONS CONTINUES

§ 1. Continuité	131
§ 2. Cas des espaces métriques	133
§ 3. Distance d'un point à un ensemble. Extension des fonctions continues	137
§ 4. Espaces normaux. Généralisation du théorème de Tietze	144
§ 5. Espaces complètement réguliers	147
§ 6. Homéomorphismes	148
§ 7. Exemples d'homéomorphisme.	150
Exercices	152

XIII. PRODUITS CARTÉSIENS

§ 1. Produit cartésien de deux espaces topologiques	155
§ 2. Applications continues	155
§ 3. Invariants de la multiplication cartésienne	157
§ 4. Diagonale. Graphe d'une fonction	158
§ 5. Produits cartésiens généralisés	159
§ 6. X^T comme espace topologique. Le cube \mathcal{I}^T	160
§ 7. Produits cartésiens d'espaces métriques	163
Exercices	164

XIV. ESPACES À BASE DÉNOMBRABLE

§ 1. Propriétés générales	167
§ 2. Espaces séparables	168
§ 3. Problèmes de puissance	169
§ 4. Plongement dans le cube de Hilbert	171
§ 5. Points de condensation. Le théorème de Cantor-Bendixson	173
Exercices	174

XV. ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

§ 1. Espaces métriques complets	177
§ 2. Le théorème de Cantor	178
§ 3. Le théorème de Baire	178
§ 4. Extension d'un espace métrique à un espace complet	180
Exercices	181

XVI. ESPACES COMPACTS

§ 1. Définition	183
§ 2. Propriétés fondamentales	183
§ 3. Produits cartésiens. Théorème de Tychonoff	185
§ 4. Compactification (de Čech-Stone) des espaces complètement réguliers	187
§ 5. Espaces compacts métriques	189
§ 6. Topologie de convergence uniforme de Y^X	200
§ 7. Topologie compacte ouverte	201
§ 8. Discontinu de Cantor	203
§ 9. Applications continues du discontinu de Cantor	205
Exercices	209

XVII. CONNEXITÉ

§ 1. Définition. Ensembles séparés	216
§ 2. Propriétés des espaces connexes	218
§ 3. Composantes	223
§ 4. Produits cartésiens d'espaces connexes	224
§ 5. Les continus	225
§ 6. Propriétés des continus	226
Exercices	231

XVIII. CONNEXITÉ LOCALE

§ 1. Définitions et exemples	234
§ 2. Propriétés des espaces localement connexes	234
§ 3. Arcs. Connexité par arcs	236
§ 4. Continus localement connexes	238
Exercices	243

XIX. NOTION DE DIMENSION

§ 1. Ensembles de dimension 0	245
§ 2. Propriétés des ensembles de dimension 0	246

§ 3. Espaces à n dimensions	246
§ 4. Propriétés des espaces à n dimensions	248
Exercices	250

XX. LES SIMPLEXES ET LEURS PROPRIÉTÉS

§ 1. Les simplexes	251
§ 2. La subdivision simpliciale	252
§ 3. Dimension d'un simplexe	254
§ 4. Le théorème du point fixe	256
Exercices	260

XXI. COMPLEXES. CHAÎNES. HOMOLOGIES

§ 1. Groupes abéliens	262
§ 2. Simplexes orientés. Chaînes	264
§ 3. Le bord d'une chaîne. Cycles	266
§ 4. Groupes d'homologie	267
§ 5. Nombres de Betti	269
§ 6. Groupes de cohomologies	270
Exercices	271

XXII. COUPURES DU PLAN

§ 1. Propriétés auxiliaires des lignes polygonales	278
§ 2. Coupures	279
§ 3. Fonctions complexes qui ne s'annulent nulle part. Existence du logarithme	280
§ 4. Théorèmes auxiliaires	281
§ 5. Corollaires des théorèmes auxiliaires	285
§ 6. Théorèmes sur les coupures du plan	287
§ 7. Théorèmes de Janiszewski	289
§ 8. Théorème de Jordan	290
Exercices	294

LISTE DES SYMBOLES IMPORTANTS	297
---	-----

INDEX	298
-----------------	-----