Inhaltsverzeichnis.

Seite
Erklärung der Zeichen und Abkürzungen XIII

D. Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion.

1. Allgemeine Vorbemerkungen 1
1·1. Einteilung der Differentialgleichungen 1
1·2. Vorläufiges über die Lösungsverhältnisse 2

§ 1. Lineare und quasilineare Differentialgleichungen.

2. Die lineare homogene Differentialgleichung
$f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 3
2·1. Veranschaulichung der Differentialgleichung 3
2·2. Weitere Vorbemerkungen über Integrale und über Höhenlinien als Charakteristiken 4
2·3. Charakteristiken und Integralflächen 6
2·4. Gewinnung einer Übersicht über die Integralflächen durch das Studium der Charakteristiken 7
2·5. Lösung der Differentialgleichung durch Kombination der charakteristischen Gleichungen 8
2·6. Der Sonderfall $p + f(x, y)\, q = 0$ 10
(a) Grundlegender Existenzsatz 10
(b) Integralfläche durch eine Normalkurve als Anfangskurve (Cauchys Problem) 10
(c) Integralfläche durch eine beliebige Anfangskurve 11
(d) Über die Existenz eigentlicher Integrale in beliebigen Gebieten 12
(e) Über die Fortsetzbarkeit der Integralflächen 13
2·7. Einschaltung über Abhängigkeit von Funktionen und Jacobische Funktionaldeterminante 13
2·8. Die allgemeine Differentialgleichung: Hauptintegral, Existenzsätze, Integral durch eine gegebene Anfangskurve 16
2·9. Weitere Bemerkungen 18
2·10. Übersicht über die Lösungsmethoden 18

3. Die allgemeine lineare homogene Differentialgleichung
$\sum f_\nu(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0$ 19
3·1. Bezeichnungen und Vorbemerkungen 19
3·2. Charakteristiken und Integralflächen 19

Seite

3·3. Lösung der Differentialgleichung durch Kombination der charakteristischen Gleichungen . . . 20
3·4. Gewinnung aller Integrale aus einer Integralbasis . . . 21
3·5. Reduktion der Differentialgleichung, wenn einzelne Lösungen bekannt sind . . . 22
3·6. Der Sonderfall $p + \sum f_\nu(x, y)\, q_\nu = 0$ . . . 24
(a) Grundlegender Existenzsatz . . . 25
(b) Integral mit vorgeschriebenen Anfangswerten (Cauchys Problem) 25
(c) Über die Existenz eigentlicher Integrale in beliebigen Gebieten 26
3·7. Die allgemeine Differentialgleichung: Existenz der Integrale; Integrale mit gegebenen Anfangswerten . . . 27
3·8. Jacobischer Multiplikator . . . 29
3·9. Weitere Bemerkungen . . . 30
3·10. Übersicht über die Lösungsmethoden . . . 30

4. Die allgemeine lineare Differentialgleichung
$\sum f_\nu(x_1, \ldots, x_n) \dfrac{\partial z}{\partial x_\nu} + f_0(x_1, \ldots, x_n)\, z = f(x_1, \ldots, x_n)$ . . . 31

4·1. Vorbemerkungen . . . 31
4·2. Reduktion auf die homogene Differentialgleichung . . . 31
4·3. Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz . . . 32
4·4. Haars Ungleichung . . . 34
4·5. Zusätze für den Fall $n = 2$ . . . 34

5. Die quasilineare Differentialgleichung
$\sum f_\nu(x_1, \ldots, x_n, z) \dfrac{\partial z}{\partial x_\nu} = g(x_1, \ldots, x_n, z)$ . . . 35

5·1. Die Differentialgleichung und ihre Veranschaulichung . . . 35
5·2. Charakteristiken und Integralflächen . . . 36
5·3. Beispiele für die Lösung der Differentialgleichung durch geometrische Charakterisierung der Integralflächen . . . 37
5·4. Lösung der Differentialgleichung durch Reduktion auf eine lineare homogene Differentialgleichung . . . 39
5·5. Der Sonderfall $p + \sum f_\nu(x, y, z)\, q_\nu = g(x, y, z)$ . . . 40
5·6. Die allgemeine Differentialgleichung, insbesondere auch für $n = 2$ . . 43
5·7. Reihenentwicklungen . . . 44
5·8. Übersicht über die Lösungsmethoden . . . 45

6. Systeme linearer Differentialgleichungen . . . 45

6·1. Der Sonderfall $p_\nu = f_\nu(x_1, \ldots, x_n)$, $(\nu = 1, \ldots, n)$ . . . 45
6·2. Das allgemeine lineare System. Die Klammerbildung . . . 46
6·3. Involutionssysteme und vollständige Systeme . . . 48
6·4. Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Jacobische Systeme. A. Mayers Lösungsverfahren . . . 50
6·5. Eigenschaften vollständiger Systeme . . . 51
6·6. Homogene Systeme . . . 52
6·7. Reduktion homogener Systeme . . . 54
6·8. Reduktion des allgemeinen Systems . . . 58
6·9. Übersicht über die Lösungsmethoden . . . 59

Seite

7. Systeme quasilinearer Differentialgleichungen 59
7·1. Ein Sonderfall 59
7·2. Das allgemeine quasilineare System 62

§ 2. Die nichtlineare Differentialgleichung $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$.

8. Einleitende Bemerkungen 62
8·1. Die Differentialgleichung und ihre Veranschaulichung 62
8·2. Geometrische Festlegung der Charakteristiken 64
8·3. Definition des Streifens 65
8·4. Definition des charakteristischen Streifens 66
8·5. Andere Herleitungen der charakteristischen Glen 67
8·6. Reguläre und singuläre Flächenelemente und charakteristische Streifen 69
8·7. Charakteristiken, Integralstreifen und Integralflächen 70
8·8. Partikuläre, singuläre, vollständige, allgemeine Integrale 71

9. Lösungsverfahren von Lagrange 73
9·1. Vorintegrale 73
9·2. Gewinnung von vollständigen Integralen aus zwei nicht-trivialen Vorintegralen 75
9·3. Gewinnung von vollständigen Integralen aus einem nicht-trivialen Vorintegral 77
9·4. Gewinnung einer einparametrigen Schar von Integralen aus zwei nicht-trivialen Vorintegralen 79
9·5. Gewinnung weiterer Integrale aus einem vollständigen Integral . . 79
9·6. Integralfläche durch einen gegebenen Anfangsstreifen (Cauchys Problem) 81

10. Existenzsätze und weitere Lösungsverfahren 83
10·1. Überführung einer beliebigen Anfangswertaufgabe in eine „Normalaufgabe“ 83
10·2. Allgemeiner Existenzsatz. Cauchys Charakteristikenverfahren . . 85
10·3. Der Sonderfall $p = f(x, y, z, q)$; Cauchys Charakteristikenverfahren 86
10·4. Ansetzen einer Potenzreihe im Fall analytischer Funktionen . . . 88
10·5. Allgemeinere Reihenentwicklungen 89
10·6. Ungleichungen und Abschätzungen 92
10·7. Übersicht über die Lösungsmethoden 92

11. Lösungsverfahren für einige Sonderfälle 93
11·1. $F(x, y, z, p) = 0$ oder $F(x, y, z, q) = 0$ 93
11·2. $F(p, q) = 0$ 93
11·3. $F(z, p, q) = 0$ 94
11·4. $p = f(x, q)$ oder $q = g(y, p)$ 95
11·5. $f(x, p) = g(y, q)$ und $F[f(x, p\,\varphi(z)), g(y, q\,\varphi(z))] = 0$; Differentialgleichungen mit getrennten Variablen 95
11·6. $f(x, p) + g(y, q) = z$ 95
11·7. $p = f\left(\frac{y}{x}, q\right)$; $F\left(\frac{y}{x}, p, q, xp + yq - z\right) = 0$ 95

Seite
11·8. $F(xp + yq, z, p, q) = 0$ 96
11·9. $p^2 + q^2 = f(x^2 + y^2, yp - xq)$ 96
11·10. Gleichgradige Differentialgleichungen 96
11·11. $f(p, q) = xp + yq$, wo f homogen in p, q ist 97
11·12. $z = xp + yq + f(p, q)$, $F(p, q, z - xp - yq) = 0$; Clairautsche Differentialgleichung 98
11·13. $F(x, y, p, q) = 0$ 99
11·14. $F(x, y, z, p, q) = 0$, Legendresche Transformation 99
11·15. $F(x, y, z, p, q) = 0$, Eulersche Transformation 100
11·16. $F(xp - z, y, p, q) = 0$ 101
11·17. $xf(y, p, xp - z) + qg(y, p, xp - z) = h(y, p, xp - z)$ 101
11·18. $qf(u) = xp - yq$; $xqf(u) = xp - yq$; $xf(u, p, q) + yg(u, p, q) = h(u, p, q)$ mit $u = xp + yq - z$ 101

§ 3. Allgemeine Differentialgleichungen erster Ordnung $F\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$ und Systeme von solchen.

12. Die Differentialgleichung $F\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$ 102
12·1. Bezeichnungen. Vollständige, singuläre und andere Integrale . . . 102
12·2. Streifen, Integralstreifen, charakteristische Streifen und ihre Beziehung zu den Integralen 104
12·3. Überführung der Differentialgleichung in eine solche, welche die gesuchte Funktion selbst nicht enthält 105
12·4. Lösung durch Ansetzen einer Potenzreihe; Existenz- und Eindeutigkeitssatz 107
12·5. Allgemeiner Existenzsatz (Charakteristikenverfahren) 108
12·6. Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die explizite Differentialgleichung; Abschätzung des Existenzbereiches 109
12·7. Vollständige Integrale: Ihre Existenz und Verwendung zur Gewinnung weiterer Integrale 112
(a) Existenz von vollständigen Integralen 112
(b) Gewinnung weiterer Integrale aus einem vollständigen Integral 113
(c) Über das Vorkommen eines gegebenen Integrals unter den durch ein vollständiges Integral bestimmten Integralen 114
12·8. Jacobis Lösungsverfahren 115
12·9. Die vollständigen Integrale der von z freien Differentialgleichung $p + f(x, y, q) = 0$ und ihre Verwendung zur Lösung der charakteristischen Gleichungen 115
12·10. Anwendung in der Mechanik 117
12·11. Ungleichungen und Abschätzungen 119
13. Lösungsverfahren für einige Sonderfälle 120
13·1. $F(p_1, \ldots, p_n) = 0$ 120
13·2. $F(z, p_1, \ldots, p_n) = 0$ 120
13·3. $F[f_1(x_1, p_1\varphi(z)), \ldots, f_n(x_n, p_n\varphi(z))] = 0$; Differentialgleichung mit getrennten Variablen 120
(a) $f_1(x_1, p_1) f_2(x_2, p_2) \cdots f_n(x_n, p_n) = a$ 120
(b) $f_1(x_1, p_1) + f_2(x_2, p_2) + \cdots + f_n(x_n, p_n) = 0$ 121

Seite

13·4. Gleichgradige Differentialgleichungen 121

13·5. $F(\mathfrak{x}, z, \mathfrak{p}) = 0$, Legendresche Transformation 121

13·6. $\sum_{\nu=1}^{k-1} p_\nu f_\nu = \sum_{\nu=k}^{n} x_\nu f_\nu - f_{n+1}$ für ein $1 \leq k \leq n$ und

$f_\nu = f_\nu \left(x_1, \ldots, x_{k-1}, p_k, \ldots, p_n, \sum_{\nu=k}^{n} x_\nu p_\nu - z\right)$ 123

13·7. $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu f_\nu = f_{n+1}$ mit $f_\nu = f_\nu (p_1, \ldots, p_n, \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu - z)$ 123

13·8. $z = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n + f(p_1, \ldots, p_n)$; Clairautsche DGl 123

14. Systeme von Differentialgleichungen 123

14·1. Explizite Systeme. Integrabilitätsbedingungen 123

14·2. Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Jacobische Systeme im Bereich analytischer Funktionen 124

14·3. Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Jacobische Systeme im Bereich reeller Funktionen. Zurückführung des Systems auf eine einzige DGl durch die A. Mayersche Transformation 125

14·4. Jacobische und Poissonsche Klammern 127

14·5. Allgemeine Systeme. Klammerbildung 129

14·6. Involutions- und vollständige Systeme 129

14·7. Jacobis Lösungsverfahren für ein von z freies Involutionssystem . . 130

14·8. Heranziehung der Legendreschen Transformation zur Vereinfachung des Systems und Erledigung von Ausnahmefällen 132

14·9. Jacobis Lösungsverfahren für das allgemeine System 134

E. Einzel-Differentialgleichungen.

Vorbemerkungen 136

1. $F(x, y, z, p) = 0$ 136

2. Lineare und quasilineare Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen 137

1—12. $f(x, y)\, p + g(x, y)\, q = 0$ 137

13—19. $f(x, y)\, p + g(x, y)\, q = h(x, y)$ 141

20—31. $f(x, y)\, p + g(x, y)\, q = h_1(x, y)\, z + h_0(x, y)$ 142

32—43. $f(x, y)\, p + g(x, y)\, q = h(x, y, z)$ 145

44—59. $f(x, y, z)\, p + g(x, y, z)\, q = h(x, y, z)$; f, g linear in z 149

60—65. $f(x, y, z)\, p + g(x, y, z)\, q = h(x, y, z)$; f, g höchstens vom Grad 2 in bezug auf z 153

66—71. $f(x, y, z)\, p + g(x, y, z)\, q = h(x, y, z)$; Rest 154

3. Lineare und quasilineare Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Veränderlichen 155

1—19. $f(x, y, z)\, w_x + g(x, y, z)\, w_y + h(x, y, z)\, w_z = 0$; f, g, h höchstens vom ersten Grade 155

1—6. Eingliedrige Koeffizienten 155

7—11. Koeffizienten höchstens zweigliedrig 156

12—19. Koeffizienten höchstens dreigliedrig 157

Seite
20—41. $f(x, y, z)\, w_x + g(x, y, z)\, w_y + h(x, y, z)\, w_z = 0$; f, g, h höchstens vom zweiten Grade . . . 161
20—27. Eingliedrige Koeffizienten . . . 161
28—38. Koeffizienten höchstens zweigliedrig . . . 162
39—41. Koeffizienten mit mehr als zwei Gliedern . . . 163
42—59. $f(x, y, z)\, w_x + g(x, y, z)\, w_y + h(x, y, z)\, w_z = 0$; Rest . . . 164
60—64. Allgemeine lineare und quasilineare Differentialgleichungen . . . 169

4. Lineare und quasilineare Differentialgleichungen mit vier und mehr unabhängigen Veränderlichen . . . 170

5. Systeme von linearen und quasilinearen Differentialgleichungen . . . 174
1—2. Zwei unabhängige Veränderliche . . . 174
3—9. Drei unabhängige Veränderliche . . . 176
10—17. Vier unabhängige Veränderliche; zwei Gleichungen . . . 178
18—23. Vier unabhängige Veränderliche; drei Gleichungen . . . 180
24—29. Fünf unabhängige Veränderliche; zwei Gleichungen . . . 182
30—32. Fünf unabhängige Veränderliche; drei und vier Gleichungen . 185
33—36. Rest . . . 186

6. Nichtlineare Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen 188
1—13. $a\, p^2 + \cdots$ . . . 188
14—20. $f(x, y, z)\, p^2 + \cdots$ . . . 190
21—33. $a\, p\, q + \cdots$ . . . 192
34—42. $f(x, y)\, p\, q + \cdots$ . . . 195
43—48. $f(z)\, p\, q + \cdots$ . . . 200
49—54. $(\cdot\cdot)\, p^2 + (\cdot\cdot)\, p\, q + \cdots = 0$ . . . 202
55—68. $a\, p^2 + b\, q^2 = f(x, y)$, $f(x, y, z)$ . . . 203
69—74. $f(x, y)\, p^2 + g(x, y)\, q^2 = h(x, y, z)$ . . . 207
75—80. $f(x, y, z)\, p^2 + g(x, y, z)\, q^2 = h(x, y, z)$ . . . 208
81—88. $(\cdot\cdot)\, p^2 + (\cdot\cdot)\, q^2 +$ lineare Glieder in p, q . . . 210
89—111. $(\cdot\cdot)\, p^2 + (\cdot\cdot)\, q^2 + (\cdot\cdot)\, p\, q + \cdots$ . . . 212
112—127. Gleichungen dritten und vierten Grades in p, q . . . 220
128—139. Rest . . . 222

7. Nichtlineare Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Veränderlichen . . . 225
1—7. Gleichungen mit ein oder zwei quadratischen Gliedern der Ableitungen . . . 225
8—14. Mehr als zwei quadratische Glieder der Ableitungen, und diese Glieder mit konstanten Koeffizienten . . . 227
15—21. Rest der Gleichungen mit quadratischen Gliedern der Ableitungen 228
22—31. Gleichungen höheren Grades in den Ableitungen . . . 231
8. Nichtlineare Differentialgleichungen mit mehr als drei unabhängigen Veränderlichen . . . 233
9. Systeme von nichtlinearen Differentialgleichungen . . . 238

Register . . . 241