

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION. — *Les problèmes de la théorie des différences finies.*

1. Le problème de l'interpolation	1
2. Sommation des fonctions et équations aux différences finies...	2
3. Les problèmes de la théorie des différences finies pour les fonctions analytiques d'une variable complexe.....	4

CHAPITRE I. — L'interpolation.

§ 1. Position générale du problème	5
1. Les différences-quotient	5
2. La formule de Lagrange	7
3. Formule de Newton.....	11
§ 2. Les polynômes de Tchebicheff	13
§ 3. Formule de Newton pour des valeurs équidistantes de la variable indépendante	21
1. La formule de Newton ; première méthode.....	21
2. Formule de Newton ; deuxième méthode.....	24
3. Les puissances généralisées.....	25
4. Exemples.....	26
§ 4. Les diverses représentations des différences-quotient.....	27
1. Première représentation d'une différence-quotient.....	27
2. Deuxième représentation d'une différence-quotient. Formule de Newton pour des points d'interpolation quelconques.....	28
3. Troisième représentation d'une différence-quotient. Formule de Hermite	33
§ 5. L'interpolation à partir d'un tableau triangulaire.....	36
1. Position du problème. Formules fondamentales.....	36
2. Estimation du reste dans la formule générale d'interpolation. Théorèmes fondamentaux sur la représentation des fonctions par des séries d'interpolation.....	41
3. Théorèmes fondamentaux sur la représentation des fonctions par des séries d'interpolation	48
§ 6. Approximation des fonctions	54
1. Position du problème et propriétés des fonctions continues...	54
2. Approximation des fonctions par des polynômes.....	57
3. Convergence de la méthode d'interpolation de Lagrange et théorème de Bernstein.....	65
4. Les polynômes de Bernstein et leur généralisation.....	74
5. Approximation des fonctions par des polynômes dans le plan complexe. Polynômes de Faber	84
§ 7. L'interpolation et le problème des moments dans le plan complexe..	88

CHAPITRE 2. — La série de Newton.

§ 1. Considérations préliminaires	99
1. Quelques majorations auxiliaires.....	99
2. La fonction Γ : définition et propriétés.....	104
3. Représentation asymptotique de $\Gamma(z)$	108
4. Quelques considérations générales sur le comportement des fonctions entières	111
5. Quelques propriétés des domaines convexes. Fonction-support d'un domaine convexe.....	115
6. Les rapports entre l'indicatrice de croissance d'une fonction entière du premier ordre et de type normal avec la distribution des singularités de la fonction associée.....	119
7. Densité d'une suite et indice de convergence.....	122
§ 2. La série de Newton pour les points d'interpolation, 1, 2, 3.....	125
1. Abscisse de convergence	125
2. Propriétés des fonctions représentées par la série de Newton..	139
3. Développement des fonctions analytiques en série de Newton.	144
§ 3. La série de Newton pour des points d'interpolation quelconques...	155
1. Domaine de convergence de la série de Newton.....	155
2. La suite des points d'interpolation a un nombre fini de points limites sur une portion finie du plan.....	164
3. La méthode d'interpolation de Newton quand les points d'interpolation ont un point d'adhérence à l'infini.....	170
4. Application des méthodes d'interpolation à la résolution de problèmes en théorie des nombres.....	178

CHAPITRE 3. — Construction d'une fonction entière à partir d'éléments donnés.

§ 1. Position du problème ; construction d'une fonction entière à partir de ses valeurs.....	193
1. Construction d'une fonction entière à partir de ses valeurs pour une suite de points	193
2. L'interpolation par les fractions rationnelles. Un théorème sur les fonctions entières	200
3. Détermination d'une fonction entière à partir des valeurs de ses dérivées successives	203
4. Le problème général de la détermination d'une fonction entière à partir d'éléments donnés	207
§ 2. Problème des moments dans le plan complexe pour des fonctions entières d'ordre au plus égal à un et de type normal.....	209
§ 3. Cas particuliers du problème général	220
1. On se donne les nombres $F(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$	221
2. On se donne les nombres $F^{(n)}(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$	223
3. On se donne les nombres $\Delta^n F(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$	225
4. On se donne les nombres $\Delta^n F(-n/2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$	226
§ 4. Equations différentielles linéaires d'ordre infini à coefficients constants ; problèmes d'interpolation se ramenant à de telles équations	227
1. Théorèmes généraux	227
2. On se donne les nombres $F^{(n+p+s)}(s)$, $0 \leq s \leq p-1$, $n = 0, 1, 2,$	230

3. On se donne les nombres $F^{(np)}(s)$, $0 \leq s \leq p - 1$, $n = 0, 1, 2$,	235
4. On se donne les nombres $A_{np,s} = \frac{1}{2\pi i} \int_C u_s(\zeta) \zeta^{np} f(\zeta) d\zeta$,	
$1 \leq s \leq p$, $n = 0, 1, 2$,	239

CHAPITRE 4. — Sommatum des fonctions. Nombres et polynômes de Bernoulli.

§ 1. Position du problème. Sommatum élémentaires.....	241
1. Les problèmes de sommatum et la détermination d'une fonction à partir d'une différence donnée.....	244
2. Sommatum élémentaires	243
3. Remarques générales sur la résolution de $\Delta F(x) = \varphi(x)$	246
4. Résolution de $\Delta F(x) = \varphi(x)$ quand $\varphi(x)$ est un polynôme.....	247
§ 2. Nombres et polynômes de Bernoulli	251
1. Calcul des nombres de Bernoulli	251
2. Autres propriétés des nombres de Bernoulli.....	253
3. Le petit théorème de Fermat.....	257
4. Autre forme de la fonction génératrice des nombres de Bernoulli	258
5. Théorème de Staudt	260
6. Propriétés analytiques des polynômes de Bernoulli.....	265
7. Théorème de multiplication des polynômes de Bernoulli.....	266
8. Propriétés géométriques des polynômes de Bernoulli.....	266
Exercices	269
§ 3. Formule d'Euler	270
1. Considérations préliminaires	270
2. Démonstration de la formule d'Euler avec reste.....	273
3. Le reste dans la formule d'Euler.....	277
4. Autre forme du reste dans la formule d'Euler.....	278
5. Formule de Stirling	283
Exercices	285

CHAPITRE 5. — Equations aux différences finies.

§ 1. Position du problème	287
§ 2. Equations linéaires du premier ordre	289
1. Equation linéaire homogène.....	289
2. Equation linéaire inhomogène	290
§ 3. Equations linéaires. Théorie générale	292
1. Forme générale des équations linéaires	292
2. Théorèmes fondamentaux sur les solutions d'une équation linéaire	292
3. Indépendance et dépendance linéaires des fonctions.....	296
4. Propriétés des solutions particulières d'une équation linéaire homogène	299
5. Equation linéaire inhomogène. Méthode de variations des constantes	303
6. Expression d'une somme multiple à l'aide d'une somme simple	306
§ 4. Equations linéaires à coefficients constants.....	308
1. Equation linéaire homogène. Equation caractéristique.....	308
2. Cas de racines multiples	311
3. Solution générale et indépendance linéaire des solutions particulières	313

4. Résolution d'une équation linéaire inhomogène	316
5. Exemples	317
Exercices	324
§ 5. Théorème de Poincaré	325
1. Position du problème	325
2. Théorème de Poincaré	326
3. Théorème de Perron	336
4. Exemple se rapportant au théorème de Poincaré	338
§ 6. Le théorème de Hölder	339
§ 7. Equations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre infini	345
1. Les équations d'ordre infini, généralisation des équations aux différences linéaires	345
2. Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre infini à coefficients constants	346
3. Les fonctions de Bernoulli généralisées engendrées par un opérateur $L(F)$	358
4. Equations linéaires inhomogènes	360
5. Les généralisations de la notion de période d'une fonction	365
Bibliographie	377
