

Inhaltsverzeichnis

Einleitung: Was sind partielle Differentialgleichungen?	1
1. Die Laplacegleichung als Prototyp einer elliptischen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung	9
1.1 Harmonische Funktionen. Greensche Funktionen. Das Dirichletproblem für die Kugel	9
1.2 Mittelwertigenschaften harmonischer Funktionen. Subharmonische Funktionen. Das Maximumprinzip	17
2. Das Maximumprinzip	33
2.1 Das Maximumprinzip von E. Hopf	33
2.2 Das Maximumprinzip von Alexandrov und Bakelman	39
2.3 Maximumprinzipien für nichtlineare Differentialgleichungen ..	44
3. Existenzverfahren I: Methoden, die auf dem Maximumprinzip beruhen	53
3.1 Differenzenverfahren: Diskretisierung von Differentialgleichungen	53
3.2 Die Perronsche Methode	62
3.3 Das alternierende Verfahren von H. A. Schwarz	66
3.4 Randregularität	71
4. Existenzverfahren II: Parabolische Methoden. Die Wärmeleitungsgleichung	79
4.1 Die Wärmeleitungsgleichung: Definition und Maximumprinzipien	79
4.2 Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung. Beziehung zwischen Wärmeleitungsgleichung und Laplacegleichung	83
4.3 Das Anfangs-Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung	91
4.4 Diskrete Verfahren	105

5.	Exkurs: Die Wellengleichung und ihre Beziehungen zur Laplace- und Wärmeleitungsgleichung	109
5.1	Die eindimensionale Wellengleichung	109
5.2	Die Mittelwertmethode: Lösung der Wellengleichung mittels der Darboux'schen Gleichung	111
5.3	Die Energiegleichung und der Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung	115
6.	Die Wärmeleitungsgleichung, Halbgruppen und Brownsche Bewegung	121
6.1	Halbgruppen	121
6.2	Infinitesimale Erzeuger von Halbgruppen	123
6.3	Brownsche Bewegung	139
7.	Das Dirichletsche Prinzip. Variationsmethoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen (Existenzverfahren III)	151
7.1	Das Dirichletsche Prinzip	151
7.2	Der Sobolevraum $W^{1,2}$	154
7.3	Schwache Lösungen der Poissongleichung	161
7.4	Quadratische Variationsprobleme	164
7.5	Abstrakte Hilbertraumformulierung des Variationsproblems. Ausblick auf die Methode der finiten Elemente	166
8.	Sobolevräume und die L^2-Regularitätstheorie	177
8.1	Allgemeine Sobolevräume. Einbettungssätze von Sobolev, Morrey und John-Nirenberg	177
8.2	Die L^2 -Regularitätstheorie: Innere Regularität schwacher Lösungen der Poissongleichung	192
8.3	Regularität am Rande und Regularitätsaussagen für Lösungen allgemeiner linearer elliptischer Differentialgleichungen ...	199
9.	Starke Lösungen	209
9.1	Die Regularitätstheorie der starken Lösungen	209
9.2	Ausblick auf die L^p -Regularitätstheorie und Anwendungen auf Lösungen semilinearer elliptischer Gleichungen	214
10.	Die Schaudersche Regularitätstheorie und die Kontinuitätsmethode (Existenzverfahren IV)	221
10.1	Die C^α -Regularitätstheorie für die Poissongleichung	221
10.2	Die Schauderschen Abschätzungen	229
10.3	Existenzverfahren IV: Die Kontinuitätsmethode	235

11. Die Mosersche Iterationstechnik und der Regularitätssatz von de Giorgi und Nash	241
11.1 Die Mosersche Harnackungleichung	241
11.2 Eigenschaften von Lösungen elliptischer Gleichungen	253
11.3 Die Regularität von Minima von Variationsproblemen	257
A. Banach- und Hilberträume. Die L^p-Räume	275
Notationsindex	283
Sachverzeichnis	287
Literaturverzeichnis	291