

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|-----------|
| <i>Préface</i> | V |
| <i>Historique</i> | 1 |
| CHAPITRE I. — La transformation de Laplace à une variable | 5 |
| I. <i>Propriétés de l'intégrale de Laplace</i> | 5 |
| 1. Définitions | 5 |
| 2. Existence de la fonction image | 6 |
| Domaine de convergence | 6 |
| Conditions imposées aux originaux | 6 |
| 3. Holomorphicité | 7 |
| 4. Existence et unicité de la fonction originale | 7 |
| 5. Principe de l'utilisation de l'intégrale de Laplace | 7 |
| II. <i>Dictionnaire des fonctions images</i> | 8 |
| 1. Calcul direct | 8 |
| 2. Calcul inverse | 8 |
| 3. Développement en série de l'original | 9 |
| 4. Utilisation de paramètres | 10 |
| 5. Combinaison des procédés | 11 |
| III. <i>Les correspondances opératoires</i> | 11 |
| 1. Linéarité | 11 |
| 2. Théorème de similitude | 11 |
| 3. Théorème de l'amortissement | 12 |
| 4. Théorème de translation | 12 |
| 5. Dérivation de l'original | 13 |
| 6. Dérivation et intégration de l'image | 14 |
| 7. Dérivation et intégration par rapport à un paramètre | 14 |
| 8. Produit des images | 15 |
| 9. Produit des originaux | 16 |
| IV. <i>Calcul des fonctions originales</i> | 17 |
| 1. L'intégration d'inversion de Mellin | 17 |
| 2. Développement en série de l'image | 19 |
| 3. Développement des fractions rationnelles | 21 |
| V. <i>Comportement asymptotique des fonctions</i> | 22 |
| 1. Intérêt du comportement asymptotique | 22 |
| 2. Limites des transformées de Laplace | 22 |
| 3. Limites de $[pf(p)]$ | 23 |
| 4. Développement asymptotique de l'image | 24 |
| 5. Développement asymptotique de l'original | 25 |
| CHAPITRE II. — Résolution des équations différentielles | 29 |
| I. <i>Équations différentielles à coefficients constants</i> | 29 |
| 1. Équations différentielles du premier ordre | 29 |
| 2. Équations différentielles du deuxième ordre | 30 |
| 3. Équation différentielle d'ordre n | 31 |

| | |
|--|----|
| II. Schéma général de résolution | 31 |
| III. Le système d'équations différentielles à coefficients constants | 32 |
| 1. Système à deux inconnues | 32 |
| 2. Les valeurs initiales des systèmes | 33 |
| 3. Résolution par réduction du système | 34 |
| IV. Les équations différentielles à coefficients variables | 34 |
| CHAPITRE III. — Résolution des équations aux différences | 37 |
| I. Les équations aux différences à variables continues | 37 |
| 1. Définitions | 37 |
| 2. Résolution numérique | 37 |
| 3. Résolution par la transformation de Laplace | 38 |
| Valeurs initiales nulles | 38 |
| Équation homogène | 39 |
| II. Les équations aux différences à variables discontinues | 40 |
| 1. Définitions | 40 |
| 2. Résolution de l'équation du second ordre | 40 |
| Racines distinctes | 41 |
| Racines égales | 42 |
| CHAPITRE IV. — Résolution des équations intégrales | 45 |
| I. Les équations intégrales convolutives linéaires | 45 |
| 1. Équations intégrales de première espèce | 45 |
| Méthode de résolution par dérivation | 45 |
| Méthode de résolution par intégration | 46 |
| 2. Équations intégrales de seconde espèce | 48 |
| II. Les équations intégrales convolutives non linéaires | 49 |
| III. Les équations convolutives dans un intervalle infini | 51 |
| IV. Les équations intégral-différentielles | 52 |
| CHAPITRE V. — Résolution des équations aux dérivées partielles (Première méthode) | 55 |
| I. Principes de la méthode de résolution | 55 |
| 1. Généralités | 55 |
| 2. Exemple: Équation de propagation de la chaleur | 56 |
| 3. Schéma général de résolution | 58 |
| II. Équation de propagation de la chaleur | 59 |
| 1. Limites non finies | 59 |
| Équation homogène | 60 |
| Équation non homogène | 60 |
| Solution générale | 62 |
| 2. Limites finies | 62 |
| 3. Cylindre de longueur non finie | 63 |
| III. Équation des cordes vibrantes | 64 |
| 1. Limites semi-infinies | 64 |
| 2. Corde déplacée initialement | 64 |

| | |
|--|----|
| IV. Équation des télégraphistes | 66 |
| CHAPITRE VI. — <i>Calcul d'intégrales et étude des fonctions</i> | 69 |
| I. <i>Applications au calcul d'intégrales</i> | 69 |
| 1. Théorème de convolution | 69 |
| 2. Limite lorsque $p \rightarrow +0$ | 70 |
| 2. Intégration de l'image | 71 |
| 4. Utilisation d'un paramètre | 72 |
| II. <i>Étude des fonctions</i> | 73 |
| 1. Fonction de Bessel | 73 |
| 2. Polynômes de Laguerre | 77 |
| CHAPITRE VII. — <i>La transformation de Laplace des fonctions périodiques et des distributions</i> | 79 |
| I. <i>Formules générales</i> | 79 |
| 1. Définition de la transformation finie | 79 |
| 2. Propriétés de l'image | 79 |
| II. <i>Développement en séries de Fourier</i> | 80 |
| 1. Séries de Fourier des fonctions périodiques | 80 |
| 2. Exemple | 82 |
| 3. Impulsion $\delta(t)$ périodiques | 83 |
| III. <i>Résolution des équations</i> | 84 |
| 1. Équations différentielles | 84 |
| 2. Équations intégrales | 85 |
| IV. <i>Propriétés des distributions</i> | 87 |
| 1. Définitions | 87 |
| Convergence sur \mathcal{D} | 88 |
| Distributions | 88 |
| 2. Distribution de Dirac | 89 |
| «Fonction de Dirac» | 89 |
| 3. Dérivation des distributions | 90 |
| Fonction «échelon unité» | 91 |
| 4. Multiplication | 91 |
| Dérivation du produit | 92 |
| 5. Produit de convolution | 92 |
| Unité de l'algèbre de convolution | 93 |
| Translation | 93 |
| Dérivation | 93 |
| Dérivation d'un produit de convolution | 93 |
| 6. Calcul opérationnel d'Heaviside | 93 |
| V. <i>La transformation de Laplace des distributions</i> | 94 |
| 1. Définitions | 94 |
| Existence de la transformée | 94 |
| Holomorphie | 94 |
| 2. Exemples de transformées de Laplace | 95 |
| Distribution δ | 95 |
| Distribution U | 95 |
| 3. Produit de convolution | 95 |
| 4. Dérivation de l'original | 96 |
| 5. Formule d'inversion | 96 |

| | |
|---|-----|
| VI. Résolution des équations de convolution | 96 |
| 1. Équations convolutives de première espèce | 96 |
| 2. Solution élémentaire | 97 |
| 3. Solution générale | 98 |
| | |
| CHAPITRE VIII. — <i>La transformation de Laplace à deux variables</i> | 101 |
| I. Propriétés de l'intégrale double de Laplace | 101 |
| 1. Définitions | 101 |
| 2. Existence de la fonction image | 102 |
| Théorème d'Amério | 102 |
| Domaine de convergence | 103 |
| 3. Existence de la fonction originale | 103 |
| 4. Unicité de la fonction originale | 104 |
| 5. Propriétés asymptotiques | 104 |
| Théorèmes taubériens | 104 |
| Théorèmes abéliens | 104 |
| II. Dictionnaire des fonctions images | 105 |
| III. Calcul des fonctions originales | 106 |
| 1. Intégrale d'inversion complexe | 106 |
| 2. Autres formules d'inversion | 107 |
| 3. Développements en séries | 108 |
| Développement en série entière | 108 |
| Développement en série de polynômes orthogonaux | 108 |
| IV. Les correspondances opératoires: premier groupe | 110 |
| 1. Théorème de similitude | 110 |
| 2. Théorème d'amortissement | 110 |
| 3. Théorème de translation | 111 |
| 4. Intégration de l'original | 111 |
| 5. Dérivation de l'original | 111 |
| Dérivation de $F(x, t)$ | 111 |
| Multiplication par un polynôme | 112 |
| 6. Intégration de l'image | 112 |
| 7. Dérivation de l'image | 112 |
| 8. Produit de composition | 113 |
| 9. Formule de Parseval | 113 |
| 10. Formule généralisée de Van der Pol | 114 |
| 11. Séquences opérationnelles | 114 |
| V. Les correspondances opératoires: deuxième groupe | 115 |
| 1. Combinaisons linéaires des variables de l'original | 115 |
| Image de $F(x+t)$ | 115 |
| Image de $F(x-t)$ | 116 |
| Image de $F(x-t)$ | 116 |
| 2. Combinaisons non linéaires des variables de l'original | 117 |
| Image de $F(\sqrt{x^2 \pm t^2})$ | 117 |
| Image de $F(\sqrt{x^2 + t^2})/\sqrt{x^2 \pm t^2}$ | 117 |
| 3. Réduction à une variable | 118 |
| 4. Fonctions de fonctions | 118 |
| Images doubles des fonctions de fonctions | 119 |
| | |
| CHAPITRE IX. — <i>Résolution des équations aux dérivées partielles (Deuxième méthode)</i> | 121 |
| I. Méthode de résolution | 121 |
| 1. Schéma général | 121 |

| | |
|--|-----|
| 2. Méthodes nouvelles | 122 |
| Holomorphie de l'image | 122 |
| Utilisation des correspondances opératoires | 122 |
| Limitation de l'intervalle de définition | 123 |
| II. Équations linéaires du premier ordre | 123 |
| 1. Équations à caractéristiques de pente positive | 123 |
| 2. Équations à caractéristiques de pente négative | 125 |
| III. Équation de propagation de la chaleur | 127 |
| Relation entre les valeurs initiales | 128 |
| Conditions initiales données: $A(x)$ et $B(t)$ | 129 |
| Conditions initiales données: $A(x)$ et $B_1(t)$ | 131 |
| IV. Équation du potentiel | 131 |
| Relations entre les valeurs initiales | 132 |
| Conditions imposées: $A(x)$ et $A_1(x)$ | 133 |
| CHAPITRE X. — Résolution des équations intégrales et calcul d'intégrales | 137 |
| I. Résolution des équations intégrales | 137 |
| 1. Équations convolutives | 137 |
| 2. Domaine d'intégration infini | 138 |
| 3. Fonctions réciproques et self-réciproques | 139 |
| II. Calcul d'intégrales | 140 |
| 1. Passage à la limite | 140 |
| 2. Formule de Van der Pol | 140 |
| 3. Utilisation de paramètres | 140 |
| 4. Itération de la transformation de Laplace | 142 |
| III. Étude des fonctions | 142 |
| 1. Fonctions de Bessel | 142 |
| 2. Polynômes de Laguerre | 144 |
| 3. Polynômes généralisés de Laguerre | 145 |
| CHAPITRE XI. — La transformation de Laplace associée à d'autres transformations | 147 |
| I. Les transformations intégrales | 147 |
| Transformation de Fourier | 147 |
| Transformation de Hankel | 148 |
| Transformation de Mellin | 148 |
| II. Propriétés de la transformation de Laplace-Hankel | 148 |
| 1. Définition et convergence | 148 |
| 2. Holomorphie | 149 |
| 3. Inversion | 150 |
| 4. Propriétés diverses | 150 |
| Similitude | 150 |
| Amortissement | 150 |
| Translation | 150 |
| Dérivation | 150 |
| Produit de composition par rapport à t | 151 |
| Formule de Parseval | 151 |
| 5. Propriété asymptotique | 151 |
| 6. Relation avec la transformation double de Laplace | 152 |

| | |
|---|-----|
| III. Résolution des équations aux dérivées partielles par la transformation de Laplace-Hankel | 153 |
| 1. Méthode de résolution | 153 |
| 2. Équation de propagation de la chaleur | 154 |
| IV. Transformation de Laplace-Fourier | 157 |
| 1. Définition | 157 |
| 2. Résolution de l'équation de la chaleur | 158 |
| V. Transformation finie de Laplace-Fourier | 160 |
| 1. Définition | 160 |
| 2. Équation des ondes | 161 |
| ANNEXE. — Notations employées et définitions des fonctions | 163 |
| I. Notations employées | 163 |
| II. Définition des fonctions | 164 |
| FORMULAIRE I. — La transformation de Laplace à une variable | 171 |
| I. Correspondances opératoires | 171 |
| 1. Similitude et translation | 171 |
| 2. Multiplication par une fonction | 171 |
| 3. Dérivation | 172 |
| 4. Intégration | 172 |
| 5. Valeurs limites | 174 |
| 6. Fonctions composées | 174 |
| II. Dictionnaire d'images | 177 |
| 1. Fonctions algébriques rationnelles | 177 |
| 2. Fonctions algébriques irrationnelles | 181 |
| 3. Fonctions exponentielles | 186 |
| 4. Fonctions logarithmiques | 191 |
| 5. Fonctions trigonométriques | 193 |
| 6. Fonctions hyperboliques | 195 |
| 7. Fonctions polynômes | 197 |
| 8. Fonctions de Bessel et fonctions modifiées de Bessel | 198 |
| 9. Fonctions de Hankel et fonctions modifiées de Hankel | 200 |
| 10. Fonctions Thêta | 202 |
| 11. Fonctions d'erreur | 202 |
| 12. Fonctions intégrales diverses | 203 |
| 13. Distributions | 208 |
| FORMULAIRE II. — La transformation de Laplace à deux variables | 209 |
| I. Correspondances opératoires | 209 |
| 1. Translation et similitude | 209 |
| 2. Dérivation | 210 |
| 3. Multiplication par une fonction | 210 |
| 4. Intégration | 213 |
| 5. Combinaisons des variables et des fonctions | 219 |
| II. Dictionnaire d'images | 222 |
| 1. Fonctions algébriques rationnelles | 222 |
| 2. Fonctions algébriques irrationnelles | 226 |
| 3. Fonctions exponentielles | 230 |
| 4. Fonctions logarithmiques | 232 |
| 5. Fonctions hyperboliques | 233 |
| 6. Fonctions d'erreur | 234 |
| 7. Fonctions diverses | 234 |
| Bibliographie | 237 |