

## INHALTSVERZEICHNIS

## ERSTER TEIL

## Der Gebrauch der komplexen Zahlen

<i>Erstes Kapitel: Die komplexen Zahlen vom algebraischen Standpunkt aus</i> . . . . .	13
Die Entdeckung der komplexen Zahlen . . . . .	13
Definition der komplexen Zahlen . . . . .	14
Konjugiert komplexe Zahlen . . . . .	19
Absolute Beträge . . . . .	20
Unimodulare Zahlen . . . . .	22
Das Argument einer komplexen Zahl . . . . .	24
Die Wurzeloperation . . . . .	25
 <i>Zweites Kapitel: Die komplexen Zahlen vom geometrischen Standpunkt aus</i> . . . . .	 27
Die Gaußsche Ebene . . . . .	27
Die Kreise der Gaußschen Ebene . . . . .	30
Die Gruppe der Möbiusschen Transformationen . . . . .	31
Die Kreisverwandtschaften . . . . .	32
Winkeltreue . . . . .	34
Die Zahl Unendlich . . . . .	35
Die Riemannsche Kugel . . . . .	36
Doppelverhältnisse . . . . .	38
Spiegelung am Kreis . . . . .	41
Bestimmung der Lage und der Größe von Kreisen . . . . .	44
Kreisküschel . . . . .	46
Möbiussche Transformationen, die durch zwei Spiegelungen erzeugt werden . . . . .	49
Darstellung der allgemeinsten Möbiusschen Transformation als Produkt von Spiegelungen an Kreisen . . . . .	51
 <i>Drittes Kapitel: Euklidische, sphärische und nichteuklidische Geometrie</i> . . . . .	 54
Kreisküschel . . . . .	54
Gleichungen der Kreise eines Bündels . . . . .	55
Zusammensetzung von Spiegelungen an den Kreisen eines Bündels . . . . .	57
Die Bewegungen der euklidischen, der sphärischen und der nichteuklidischen Geometrie . . . . .	57
Die Entfernungsinvarianten . . . . .	60
Sphärische Trigonometrie . . . . .	63
Nichteuklidische Trigonometrie . . . . .	69
Die sphärische Geometrie . . . . .	73
Die elliptische Geometrie . . . . .	75
Die Drehungen der Kugel . . . . .	77
Die nichteuklidische Geometrie . . . . .	79
Die nichteuklidischen Bewegungen . . . . .	81
Die Poincarésche Halbebene . . . . .	84
Die chordale und die pseudochordale Entfernung . . . . .	86

## ZWEITER TEIL

**Hilfssätze aus dem Gebiete der Punktmengen und der Topologie**

<i>Erstes Kapitel: Konvergente Zahlenfolgen und stetige komplexe Funktionen</i> . . . . .	91
Definition der Konvergenz . . . . .	91
Klassifikation der Punktmengen . . . . .	93
Die kompakten Punktmengen . . . . .	94
Das Cantorsche Diagonalverfahren . . . . .	95
Komplexe Funktionen . . . . .	96
Die Randwerte einer komplexen Funktion . . . . .	98
 <i>Zweites Kapitel: Kurven und Gebiete</i> . . . . .	 100
Zusammenhängende Punktmengen . . . . .	100
Kurven . . . . .	101
Gebiete . . . . .	102
Gebietstreue Abbildungen . . . . .	102
Jordansche Kurven . . . . .	103
Einfach und mehrfach zusammenhängende Gebiete . . . . .	106
 <i>Drittes Kapitel: Kurvenintegrale</i> . . . . .	 109
Rektifizierbare Kurven . . . . .	109
Komplexe Kurvenintegrale . . . . .	110
Haupteigenschaften der Kurvenintegrale . . . . .	115
Der Mittelwertsatz . . . . .	117

## DRITTER TEIL

**Die analytischen Funktionen**

<i>Erstes Kapitel: Die Grundlagen der Theorie</i> . . . . .	121
Differentiation der komplexen Funktionen . . . . .	121
Integrierbare Funktionen . . . . .	122
Definition der regulären analytischen Funktionen . . . . .	125
Der Cauchysche Satz . . . . .	126
Das Cauchysche Integral . . . . .	129
Haupteigenschaften der analytischen Funktionen . . . . .	131
Der Riemannsche Satz . . . . .	131
 <i>Zweites Kapitel: Das Prinzip vom Maximum</i> . . . . .	 133
Der Mittelwert der Funktionswerte auf einem Kreise . . . . .	133
Das Prinzip des Maximums . . . . .	134
Das Schwarzsche Lemma . . . . .	136
Die Nullstellen der regulären analytischen Funktionen . . . . .	138
Die Gebietstreue . . . . .	139
Die Ableitung einer nichtkonstanten analytischen Funktion kann nicht identisch verschwinden . . . . .	141
 <i>Drittes Kapitel: Das Poissonsche Integral und die harmonischen Funktionen</i> . . . . .	 142
Bestimmung einer analytischen Funktion durch ihren reellen Teil . . . . .	142
Umformung des Cauchyschen Integrals für den Kreis . . . . .	143

Das Poissonsche Integral . . . . .	145
Die Cauchy-Riemannschen Gleichungen und die harmonischen Funktionen . .	148
Der Satz von Harnack . . . . .	152
Das harmonische Maß . . . . .	153
Eine Riemannsche Ungleichung . . . . .	156
<i>Viertes Kapitel: Die meromorphen Funktionen . . . . .</i>	<i>157</i>
Erweiterung der Definition einer analytischen Funktion . . . . .	157
Das Rechnen mit meromorphen Funktionen. . . . .	158
Partialbruchzerlegung . . . . .	160
Isolierte wesentlich singuläre Stellen . . . . .	161
Der Satz von Liouville und seine Anwendung auf Polynome. . . . .	163
Der Hauptsatz der Algebra . . . . .	165
Weitere Eigenschaften der Polynome. . . . .	166
<b>VIERTER TEIL</b>	
<b>Erzeugung analytischer Funktionen durch Grenzprozesse</b>	
<i>Erstes Kapitel: Stetige Konvergenz . . . . .</i>	<i>171</i>
Stetige Konvergenz . . . . .	171
Die Grenzwandlung . . . . .	172
Der normale Kern einer Funktionsfolge. . . . .	176
Vergleichung von stetiger und gleichmäßiger Konvergenz . . . . .	176
<i>Zweites Kapitel: Normale Familien von meromorphen Funktionen. . . . .</i>	<i>178</i>
Die Grenzwandlung bei Folgen von meromorphen Funktionen. . . . .	178
Normale Familien von meromorphen Funktionen . . . . .	180
Kompakte normale Familien . . . . .	181
Die im Kleinen gleichmäßig beschränkten Familien von analytischen Funktionen	182
Die Grenzfunktionen der normalen Familien von meromorphen Funktionen . .	183
Der Satz von Vitali . . . . .	186
Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	186
Der Satz von Osgood. . . . .	187
Normale Familien von Möbiusschen Transformationen . . . . .	189
Der Satz von Hurwitz . . . . .	191
Ein Kriterium für im Kleinen beschränkte normale Familien . . . . .	192
Schlichte Funktionen. . . . .	193
<i>Drittes Kapitel: Potenzreihen . . . . .</i>	<i>194</i>
Absolut konvergente Reihen . . . . .	194
Potenzreihen . . . . .	197
Der Konvergenzradius . . . . .	198
Die Taylorsche Reihe. . . . .	200
Normale Folgen von Potenzreihen . . . . .	202
Das Rechnen mit Potenzreihen . . . . .	205
Die Abelsche Transformation . . . . .	208
<i>Viertes Kapitel: Partialbruchzerlegung und Residuunkalkül . . . . .</i>	<i>211</i>
Der Laurentsche Satz . . . . .	211
Analytische Funktionen mit endlich vielen isolierten singulären Stellen . . . .	214
Der Satz von Mittag-Leffler. . . . .	215

Meromorphe Funktionen mit vorgeschriebenen einfachen Polen . . . . .	218
Das Residuum und seine Anwendung . . . . .	219
Die Anzahl der Nullstellen und der Satz von Rouché . . . . .	221
Umkehrung einer analytischen Funktion . . . . .	222
Die Lagrangesche Reihe . . . . .	223
Die Keplersche Gleichung . . . . .	226
Der Monodromiesatz . . . . .	228

## FÜNFTER TEIL

## Spezielle Funktionen

<i>Erstes Kapitel: Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen . . . . .</i>	233
Die Exponentialfunktion $e^z$ . . . . .	233
Die trigonometrischen Funktionen . . . . .	235
Die Perioden der Exponentialfunktion . . . . .	238
Die hyperbolischen Funktionen . . . . .	240
Die Perioden und die Fundamentalbereiche der trigonometrischen Funktionen	241
Die Funktionen $\operatorname{tg} z$ und $\operatorname{tgh} z$ . . . . .	243
Numerische Berechnung von $\pi$ . . . . .	245
<i>Zweites Kapitel: Der Logarithmus und die allgemeine Potenz . . . . .</i>	247
Der natürliche Logarithmus . . . . .	247
Reihenentwicklungen und Abschätzungen des Logarithmus . . . . .	250
Die allgemeine Potenz . . . . .	253
Die mehrdeutige Umkehrung einer regulären Funktion . . . . .	255
Abschätzung von $n!$ . . . . .	256
Abschätzung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}}$ . . . . .	256
Die Partialbruchzerlegung von $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ . . . . .	258
Die Produktdarstellung von $\sin \pi z$ . Die Formel von Wallis . . . . .	260
<i>Drittes Kapitel: Die Bernoullischen Zahlen und die Gammafunktion . . . . .</i>	262
Die Inverse der Differenzenoperation . . . . .	262
Die Bernoullischen Zahlen . . . . .	264
Der symbolische Kalkül von E. Lucas . . . . .	265
Der Satz von Th. Clausen . . . . .	269
Die Eulersche Konstante . . . . .	272
Die Funktion $\Gamma(z)$ . . . . .	273
Der Satz von Bohr-Mollerup . . . . .	276
Die Stirlingsche Reihe . . . . .	278
Die Gaußsche Multiplikationsformel . . . . .	281
Zusammenstellung und Anwendung der Formeln . . . . .	283
Namen- und Sachregister . . . . .	285