

# INHALTSVERZEICHNIS.

## Erster Abschnitt.

### Über die Sätze und Methoden der Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen. Mengenlehre.

#### Erstes Kapitel.

##### Von den Grundbegriffen der Differential- und Integralrechnung.

	Seite
§ 1. Begriff der Funktion . . . . .	1
§ 2. Grenzwert . . . . .	3
§ 3. Stetigkeit . . . . .	9
§ 4. Die Stetigkeitssätze . . . . .	13
§ 5. Die Ableitung . . . . .	19
§ 6. Der Rollesche und der Mittelwertsatz . . . . .	23
§ 7. Sätze, betreffend die Existenz eines Grenzwertes . . . . .	26
§ 8. Punktmengen . . . . .	33
§ 9. Beweis der Stetigkeitssätze . . . . .	38
§ 10. Das bestimmte Integral . . . . .	41
§ 11. Mehrdeutige Funktionen . . . . .	47
§ 12. Ein allgemeines Theorem . . . . .	49

#### Zweites Kapitel.

##### Über reelle Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen.

§ 1. Begriff des Grenzwertes . . . . .	51
§ 2. Stetigkeit; reguläre Kurven und Bereiche . . . . .	55
§ 3. Der Mittelwertsatz . . . . .	59
§ 4. Implizite Funktionen . . . . .	64
§ 5. Fortsetzung: Funktionensysteme . . . . .	70
§ 6. Umkehrung eines Funktionensystems . . . . .	73
§ 7. Abbildung zweier Flächen aufeinander im Kleinen . . . . .	74

#### Drittes Kapitel.

##### Gleichmäßige Konvergenz.

§ 1. Der doppelte Grenzübergang . . . . .	86
§ 2. Die Stetigkeit einer durch eine unendliche Reihe dargestellten Funktion, an Beispielen erläutert . . . . .	87
§ 3. Gleichmäßige Konvergenz; ein Reihensatz . . . . .	94
§ 4. Das Weierstraßsche Kriterium für gleichmäßige Konvergenz . . . . .	100
§ 5. Gliedweise Integration einer unendlichen Reihe . . . . .	106

X	Inhaltsverzeichnis	Seite
§ 6.	Gliedweise Differentiation einer unendlichen Reihe . . . . .	110
§ 7.	Stetigkeit einer durch ein bestimmtes Integral dargestellten Funktion . . . . .	114
§ 8.	Von den iterierten Integralen . . . . .	118
§ 9.	Differentiation unter dem Integralzeichen . . . . .	120
	Anhang. Über nicht-analytische Funktionen . . . . .	124

### Viertes Kapitel.

#### Kurvenintegrale und mehrfach zusammenhängende Bereiche.

§ 1.	Kurvenintegrale . . . . .	132
§ 2.	Das Integral $\int Pdx + Qdy$ . Erste Methode . . . . .	138
§ 3.	Fortsetzung; zweite Methode . . . . .	142
§ 4.	Mehrfach zusammenhängende Bereiche . . . . .	150

### Fünftes Kapitel.

#### Mengenlehre.

	Mengenlehre . . . . .	156
§ 1.	Kurven . . . . .	157
§ 2.	Das zweidimensionale Kontinuum . . . . .	161
§ 3.	Darstellung eines Bereiches durch eine unendliche Reihe von Teilbereichen . . . . .	166
§ 4.	Vorbereitungen zum Beweise des Hauptsatzes von § 6 . . . . .	171
§ 5.	Fortsetzung: Ordnung eines Punktes; zwei Hilfssätze . . . . .	175
§ 6.	Der Fundamentalsatz . . . . .	181
§ 7.	Weitere Sätze aus der Analysis situs . . . . .	183
§ 8.	Innere Normale und Integration in positivem Sinne über den Rand eines Bereiches . . . . .	187
§ 9.	Zerlegung eines regulären Bereiches in Teilbereiche von norma- lem Typus . . . . .	190
§ 10.	Zusammenstellung eines einfach zusammenhängenden Bereiches aus Teilbereichen von normalem Typus . . . . .	196
§ 11.	Über abzählbare und nicht-abzählbare Mengen . . . . .	200
§ 12.	Über den Inhalt von Punktmengen . . . . .	208
§ 13.	Eine an die Menge $M$ sich anschließende Funktion . . . . .	211

### Zweiter Abschnitt.

#### Grundlagen der allgemeinen Theorie der Funktionen einer komplexen Größe.

##### Einleitung.

Über das komplexe Zahlensystem . . . . .	213
--	-----

### Sechstes Kapitel.

#### Analytische Funktionen und die darauf bezüglichen Differentialsätze. Die elementaren Funktionen. Lineare Transformationen.

§ 1.	Die rationalen Funktionen als Vorbild. . . . .	227
§ 2.	Funktionen, Grenzwert und Stetigkeit. . . . .	228
§ 3.	Über die Änderung des Arcus einer stetigen Funktion . . . . .	231

## Inhaltsverzeichnis

	XI Seite
§ 4. Die Ableitung . . . . .	235
§ 5. Analytische Funktionen . . . . .	238
§ 6. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen . . . . .	239
§ 7. Die Umkehrfunktion . . . . .	243
§ 8. Konforme Abbildung . . . . .	245
§ 9. Zwei geographische Karten . . . . .	249
§ 10. Die Transformation durch reziproke Radien . . . . .	252
§ 11. Die allgemeine lineare Transformation . . . . .	257
§ 12. Die Funktion $w = z^m$ . . . . .	259
§ 13. Die Exponentialfunktion . . . . .	262
§ 14. Die trigonometrischen Funktionen. . . . .	265
§ 15. Der Logarithmus und die inversen trigonometrischen Funktionen; die allgemeine Potenz . . . . .	266
§ 16. Die lineare Transformation in kinematischer Behandlungsweise . . . . .	272
§ 17. Fortsetzung; der allgemeine Fall . . . . .	276
§ 18. Erzeugung der allgemeinen linearen Transformation aus einer ganzen Transformation durch den Prozeß der sogenannten „Transformation“ . . . . .	286
§ 19. Schlußbemerkungen über lineare Transformationen . . . . .	288

## Siebentes Kapitel.

### Integralsätze und singuläre Punkte. Rationale Funktionen. Reihenentwicklungen.

§ 1. Bestimmte Integrale . . . . .	291
§ 2. Der Cauchysche Integralsatz . . . . .	298
§ 3. Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatze . . . . .	299
§ 4. Die Cauchysche Integralformel . . . . .	310
§ 5. Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel . . . . .	313
§ 6. Fortsetzung: isolierte singuläre Punkte . . . . .	324
§ 7. Das Analogon des Mittelwertsatzes in der Differentialrechnung . . . . .	332
§ 8. Die Nullpunkte und Pole einer analytischen Funktion . . . . .	335
§ 9. Der Punkt $\infty$ . . . . .	338
§ 10. Die rationalen Funktionen . . . . .	344
§ 11. Das Residuum . . . . .	348
§ 12. Über Potenzreihen . . . . .	351
§ 13. Die Cauchy-Taylorische Reihe . . . . .	354
§ 14. Zur Reihenentwicklung zusammengesetzter Funktionen . . . . .	356
§ 15. Der Launtsche Satz . . . . .	364
§ 16. Der Goursatsche Satz . . . . .	367
§ 17. Rückblick auf die Entwicklungen dieses Kapitels . . . . .	371

## Achstes Kapitel.

### Mehrdeutige Funktionen und Riemannsche Flächen.

§ 1. Die Riemannsche Fläche für $w = \log z$ . . . . .	374
§ 2. Die Riemannsche Fläche für $w = z^m$ . . . . .	378
§ 3. Die Riemannsche Fläche für eine gebrochene Potenz einer rationalen Funktion . . . . .	384
§ 4. Die Riemannsche Fläche für die Funktion $w$ , wo $w^3 - 3w = z$ . . . . .	388
§ 5. Ein Satz, betreffend die konforme Abbildung im Großen . . . . .	397

	Seite
§ 6. Die Riemannsche Fläche für die Funktion $w$ , wo $w^4 - 4w = z$ . . . . .	401
§ 7. Die sechs Doppelverhältnisse . . . . .	404
§ 8. Über die Abbildung eines Zweiges der Funktion $w = \int_0^z \frac{z dz}{z^3 - 1}$ . . . . .	408
§ 9. Lineare Transformationen einer Riemannschen Fläche. . . . .	410
§ 10. Ein Satz, betreffend eine ausgedehnte Klasse mehrdeutiger Funktionen . . . . .	416
§ 11. Die Riemannsche Fläche für die Umkehrung einer allgemeinen rationalen Funktion . . . . .	418
§ 12. Die Riemannsche Fläche für eine allgemeine algebraische Funktion . . . . .	420
§ 13. Von dem Verhalten einer mehrdeutigen Funktion in einem Verzweigungspunkte . . . . .	423
§ 14. Fortsetzung: Parameterdarstellung in einem Verzweigungspunkte. Abbildung. . . . .	428
§ 15. Über algebraische Funktionen . . . . .	431
§ 16. Abbildung eines Rechtecks auf einen Kreis und auf einen Torus. . . . .	437
§ 17. Über algebraische Kurven . . . . .	441
§ 18. Die Riemannsche Fläche für Raumkurven . . . . .	445
§ 19. Betreffend die Arithmetisierung Riemannscher Flächen . . . . .	447

### Neuntes Kapitel.

#### Analytische Fortsetzung.

§ 1. Begriff der analytischen Fortsetzung . . . . .	449
§ 2. Sätze über analytische Fortsetzung . . . . .	453
§ 3. Endgültige Definition einer monogenen analytischen Funktion . . . . .	455
§ 4. Nähere Begründung des Hauptsatzes von § 3. . . . .	461
§ 5. Über einige spezielle monogene analytische Funktionen . . . . .	464
§ 6. Von der Permanenz einer Funktionalgleichung; analytische Fortsetzung vermöge derselben . . . . .	470

### Dritter Abschnitt.

#### Anwendungen der Theorie.

#### Zehntes Kapitel.

##### Periodische Funktionen.

§ 1. Primitive Perioden . . . . .	479
§ 2. Über Periodenstreifen und einfach periodische Funktionen . . . . .	484
§ 3. Behandlung der einfach periodischen Funktionen vermöge konformer Abbildung ihres Fundamentalbereiches . . . . .	487
§ 4. Direkte Behandlung der einfach periodischen Funktionen . . . . .	493
§ 5. Doppelperiodische Funktionen. . . . .	496
§ 6. Über doppelperiodische Funktionen zweiter Ordnung . . . . .	502
§ 7. Weitere Sätze betreffend doppelperiodische Funktionen . . . . .	511
§ 8. Eine auf dem Fundamentalbereich fußende Definition der periodischen Funktionen . . . . .	517
§ 9. Über gewisse Funktionen, welche mit den doppelperiodischen Funktionen verwandt sind . . . . .	519

## Elftes Kapitel.

## Reihen- und Produktentwicklungen.

	Seite
§ 1. Partialbruchzerlegung der Funktionen $\csc^2 z$ , $\cot z$ , usw. . . . .	524
§ 2. Herstellung doppeltperiodischer Funktionen durch unendliche Reihen. Die Funktionen $\wp(z)$ , $\zeta(z)$ . . . . .	530
§ 3. Darstellung doppeltperiodischer Funktionen mittels der $\zeta$ - und der $\wp$ -Funktion . . . . .	536
§ 4. Die $\sigma$ -Funktion . . . . .	539
§ 5. Additionstheoreme . . . . .	543
§ 6. Unendliche Produkte . . . . .	544
§ 7. Fortsetzung: funktionentheoretische Eigenschaften . . . . .	549
§ 8. Unendliche Produkte für $\sin z$ , $\sigma(z)$ , usw. . . . .	554
§ 9. Die Poincaréschen Thetareihen . . . . .	556
§ 10. Die Weierstraßsche Abhandlung vom Jahre 1876 . . . . .	561
§ 11. Der Mittag-Lefflersche Satz . . . . .	565
§ 12. Verallgemeinerungen der vorhergehenden Sätze . . . . .	569
§ 13. Der Mittag-Lefflersche Anschmiegungssatz . . . . .	575
§ 14. Eindeutige Funktionen mit vorgegebenem Definitionsbereiche . . . . .	577
§ 15. Über die Entwicklung eines Zweiges einer Funktion nach rationalen Funktionen bezw. Polynomen . . . . .	578

## Zwölftes Kapitel.

## Die elementaren Funktionen.

§ 1. Der Logarithmus und dessen Umkehrung . . . . .	584
§ 2. Die $q$ -te Wurzel einer positiven Zahl und die allgemeine Potenz . . . . .	588
§ 3. Fortsetzung: Folgerungen aus den Hauptsätzen . . . . .	592
§ 4. Über Funktionalgleichungen . . . . .	595
§ 5. Die trigonometrischen Funktionen. . . . .	598
§ 6. Fortsetzung: Identifizierung der Funktionen $s(x)$ , $c(x)$ mit $\sin x$ , $\cos x$ . . . . .	607
§ 7. Über die Bestimmung der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ auf Grund ihres Additionstheorems . . . . .	608
§ 8. Entsprechendes für $\tan x$ . . . . .	612
§ 9. Andere Definition der elementaren Funktionen . . . . .	614
§ 10. Über einige Reihen- und Produktentwicklungen. Ein Satz betreffend gleichmäßige Konvergenz . . . . .	617

## Vierter Abschnitt.

## Das logarithmische Potential. Uniformisierung.

## Dreizehntes Kapitel.

## Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials.

§ 1. Physikalische Grundlagen . . . . .	624
a) Stationäre Wärmeströmungen . . . . .	624
b) Stationäre Elektrizitätsströmungen . . . . .	633
c) Strömung einer inkompressibelen Flüssigkeit . . . . .	633
d) Gravitation und statische Elektrizität, nebst Magnetismus . . . . .	639

	Seite
§ 2. Beispiele von Strömungen . . . . .	640
§ 3. Allgemeine Sätze über das logarithmische Potential. Erste Gruppe, direkt auf der Laplaceschen Gleichung fußend . . . . .	650
§ 4. Fortsetzung: zweite Gruppe, auf einer Integraldarstellung fußend .	658
§ 5. Fortsetzung: dritte Gruppe, auf einer Reihenentwicklung fußend .	687
§ 6. Ein allgemeiner Reihensatz . . . . .	697
§ 7. Harmonische Fortsetzung über eine analytische Kurve hinaus . .	699
§ 8. Über die Niveaukurven der Greenschen Funktion . . . . .	708
§ 9. Von der Beziehung der Potential- zur Funktionentheorie . . . . .	711

### Vierzehntes Kapitel.

#### Konforme Abbildungen und die Uniformisierung analytischer Funktionen.

§ 1. Über die konforme Abbildung eines einfach zusammenhängenden Bereiches auf einen Kreis . . . . .	716
§ 2. Das Thomson-Dirichletsche Prinzip und die Existenztheoreme . .	722
§ 3. Das alternierende Verfahren . . . . .	724
§ 4. Lösung der Randwertaufgabe für einen beliebigen durch analytische Kurven begrenzten Bereich . . . . .	734
§ 5. Existenzbeweis für die Greensche Funktion eines allgemeinen schlichten Bereichs von endlichem Zusammenhange . . . . .	736
§ 6. Über Kreisbogendreiecke mit verschwindenden Winkeln . . . . .	739
§ 7. Der Picardsche Satz . . . . .	744
§ 8. Über die Uniformisierung analytischer Funktionen . . . . .	748
§ 9. Der algebraische Fall. Uniformisierung vermöge automorpher Funktionen mit Grenzkreis . . . . .	750
§ 10. Beweis der Sätze betreffend Analysis situs . . . . .	757
§ 11. Existenzbeweis der dem Bereiche $\Phi_n$ zugehörigen Greenschen Funktion . . . . .	765
§ 12. Die Abbildung im Falle I . . . . .	770
§ 13. Der Koebesche Satz . . . . .	775
§ 14. Ein Abbildungssatz . . . . .	776
§ 15. Beweis des Hauptsatzes . . . . .	780
§ 16. Nachtrag; der Fall einer geschlossenen Fläche . . . . .	785
§ 17. Ein neues System von Funktionselementen . . . . .	788
§ 18. Die Riemannsche Fläche einer beliebigen Funktion . . . . .	791
§ 19. Uniformisierung einer beliebigen Funktion vermöge der automorphen Funktionen mit Hauptkreis . . . . .	793
§ 20. Über die Zerschneidung von $\Psi$ und den Fundamentalbereich der Gruppe . . . . .	799
§ 21. Existenzbeweis für mehrdeutige Funktionen mit beliebigem Definitionsbereiche . . . . .	799
Namen- und Sachregister . . . . .	804