

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete durch Lösung von Integralgleichungen mit Neumannschem Kern

§ 1. Vorbemerkungen	1
1.1. Geometrische Vorbemerkungen und Bezeichnungen	2
a) Rektifizierbare und glatte Kurven	2
b) Bezeichnungen	2
c) Der Neumannsche Kern $K(s, t)$	3
1.2. Randwerte von Cauchy-Integralen	4
§ 2. Aufstellung der Integralgleichungen	6
2.1. Die Integralgleichung von LICHTENSTEIN	6
2.2. Die Integralgleichung von GERSCHGORIN	8
2.3. Die Integralgleichung von CARRIER	9
2.4. Umformung von $\Phi(s)$ in der Integralgleichung von LICHTENSTEIN	11
2.5. Integralgleichungen für Außengebiete	12
a) Der Punkt ∞ ist Fixpunkt	12
b) Der Punkt ∞ ist Bild eines endlichen Punktes	13
2.6. Konforme Abbildung auf ein Horizontalschlitzgebiet	14
2.7. Integralgleichungen für $\theta'(s)$	15
a) Die Integralgleichung von BANIN	15
b) Die Integralgleichung von WARSCHAWSKI und STIEFEL	16
2.8. Gebiete mit Ecken; Integralgleichung von ARBENZ	16
2.9. Gebiete mit Ecken; Analogon zur Integralgleichung von LICHTENSTEIN	19
§ 3. Iterative Lösung der Integralgleichungen von § 2	21
3.1. Konvergenzaussagen mit Hilfe der Fredholmschen Theorie	22
a) Allgemeine Konvergenzaussagen	22
b) Gewinnung von Fehlerabschätzungen	23
3.2. Konvexe Gebiete	24
3.3. Der Konvergenzbeweis von WARSCHAWSKI	27
a) Eigenwerte und Eigenfunktionen von (3.9)	27
b) Einführung eines Hilbertraumes H und eines Operators T	29
c) Zwei Hilfssätze	30
d) Der Konvergenzbeweis	32
3.4. Untersuchung der Ableitungen und der allgemeinen Integralgleichungen (3.1)	33
a) Konvergenz der Folge $\{\theta'_n(s)\}$	33
b) Die Integralgleichungen (3.1)	33
c) Folgerungen für die Integralgleichungen von § 2	34
3.5. Abschätzungen für $ \lambda_2 $	36
a) Abschätzungen für $ \lambda_2 $ durch geometrische Annahmen	36
b) Vergleichssätze	37
3.6. Über die Stieltjes-Integralgleichungen aus 2.8 und 2.9	38

§ 4. Numerische Lösung verschiedener Integralgleichungen von § 2	39
4.1. Diskretisierung der Integralgleichung	40
a) Auffassung als Stieltjes-Integral	40
b) Auffassung als Riemann-Integral	41
c) Diskretisierung der adjungierten Integralgleichung	44
4.2. Abschätzung des Fehlers zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung	45
a) Weitere Eigenschaften von $K(s, t)$	45
b) Abschätzungen von $f'(s)$ und $f''(s)$	46
c) Abschätzung des Quadraturfehlers	48
d) Abschätzung von $ f(s_i) - f_i $	49
4.3. Lösung des diskreten Problems; Konvergenzbeschleunigung	52
a) Direkte Methoden	52
b) Iterationsmethoden	52
4.4. Bericht über numerische Experimente	55
§ 5. Verschiedenes	59
5.1. Methode der Störungsrechnung	59
5.2. Weitere Methode zur Behandlung von Gebieten mit Ecken	60
Kapitel II. Das Verfahren von THEODORSEN zur konformen Abbildung von $z < 1$ auf ein Gebiet	
§ 1. Die Theorie des Verfahrens von THEODORSEN	61
1.1. Konjugierte Funktionen	62
a) Im Einheitskreis konjugierte Funktionen	62
b) Eigenschaften konjugierter Funktionen	63
1.2. Die Integralgleichung von THEODORSEN	64
a) Ableitung der Integralgleichung	64
b) Bestimmung von $f(z)$ für $ z < 1$	65
c) Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Theodorsenschen Integralgleichung	66
1.3. Iterative Lösung der Integralgleichung von THEODORSEN	67
a) Die Ungleichung von WARSCHAWSKI	68
b) Der Konvergenzbeweis von WARSCHAWSKI	69
1.4. Zusätzliche Ergebnisse zum Theodorsen-Verfahren	71
a) Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit	71
b) Konvergenz der Ableitungen	72
c) Abschätzung von $ f_n(z) - f(z) $	72
d) Sternigkeit der Kurven C_n	73
e) Die Bedingung $\varepsilon < 1$	73
§ 2. Über die Berechnung konjugierter Funktionen	74
2.1. Die Methode von WITTICH	74
a) Ableitung der Formel	75
b) Eigenschaften der Matrix \mathfrak{B}	78

2.2. Andere Methoden mit äquidistanten Knoten	80
a) Die Methode von THEODORSEN	80
b) Die Methode von NAIMAN	82
c) Die Methode von TIMMAN	82
d) Die Methode von MUTHOPP	83
e) Vergleich der Methoden	83
2.3. Verwendung nicht äquidistanter Knoten	84
a) Die Formeln von FLÜGGE-LOTZ	84
b) Die Formeln von MUGGIA	84
§ 3. Numerische Lösung der Integralgleichung von THEODORSEN	85
3.1. Diskretisierung der Integralgleichung	85
a) Ableitung der Vektorgleichung	85
b) Die Operatorgleichung (3.2)	86
c) Geometrische Deutung von $\tilde{\theta}(\varphi)$	87
3.2. Lösung des diskreten Problems nach dem Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren	87
a) Gesamtschrittverfahren	87
b) Einzelschrittverfahren	89
c) Mittelung beim Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren	89
3.3. Lösung des diskreten Problems nach dem Newton-Verfahren	90
a) Durchführung eines Newton-Schrittes	90
b) Konvergenz des Newton-Verfahrens	91
3.4. Abschätzung des Fehlers zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung	92
a) Vorbemerkungen	93
b) Abschätzung des Fehlervektors \mathfrak{z}	95
c) Abschätzung von $\theta(\varphi) - \tilde{\theta}(\varphi)$	97
d) Abschätzung von $\log \varrho(\theta(\varphi)) - T(\varphi)$	98
3.5. Bericht über numerische Experimente	99
a) Durchführung der Rechnung	99
b) Eine Versuchsreihe	100
c) Weitere Experimente	104
§ 4. Verschiedene mit dem Theodorsen-Verfahren verwandte Abbildungsmethoden	105
4.1. Das Verfahren von MATTHIEU, NEHARI und v. KÁRMÁN-TREFFTZ	105
a) Ableitung der Funktionalgleichung	106
b) Die erste Näherung	106
4.2. Das Verfahren von KULISCH und MELENTJEW	107
a) Iterative Lösung von (4.1)	107
b) Das Verfahren von BERGSTRÖM	109
4.3. Spezielle Verfahren zur Profilabbildung	110
a) Das Verfahren von TIMMAN	110
b) Das Verfahren von RIEGELS und WITTICH	111
4.4. Das Verfahren von FRIBERG	113
4.5. Störungsmethode von YOSHIKAWA	114
4.6. Weitere Zitate	115

Kapitel III. Approximation konformer Abbildungen durch Polynome mit Extremaleigenschaften	
§ 1. Zwei Minimalprobleme und ihre Lösung durch Ritz-Ansatz	116
1.1. Vorbereitungen	116
a) Die Räume $L_2(G)$ und $L_2(C)$	116
b) Die Greensche Formel	118
1.2. Erstes Minimalproblem	118
1.3. Ritz-Ansatz zur Lösung von Problem I	120
a) Existenz und Eindeutigkeit des Minimalpolynoms $P_n(z)$	121
b) Gewinnung des Minimalpolynoms	122
c) Approximation von $F_0(z)$ durch die Polynome $P_n(z)$	122
1.4. Zweites Minimalproblem	125
1.5. Ritz-Ansatz zur Lösung von Problem II	127
a) Existenz und Eindeutigkeit des Minimalpolynoms $P_n(z)$	127
b) Gewinnung des Minimalpolynoms	128
c) Approximation von $F_0(z)$ durch die Polynome $P_n(z)$	128
§ 2. Die Verwendung orthogonaler Polynome zur konformen Abbildung	131
2.1. Gewinnung der orthogonalen Polynome	132
a) Orthogonalisierungsverfahren von E. SCHMIDT	132
b) Gewinnung der $p_n(z)$ mit Hilfe von Determinanten	132
2.2. Darstellung der Minimalpolynome $P_n(z)$ und der Kernfunktionen	133
2.3. Das asymptotische Verhalten der $p_n(z)$	136
a) Verhalten innerhalb C	136
b) Verhalten auf und außerhalb C	136
2.4. Einige weitere Eigenschaften der Kernfunktionen	139
§ 3. Numerische Gewinnung der Näherungspolynome	140
3.1. Direkte Gewinnung der Minimalpolynome	140
3.2. Durchführung des Orthonormierungsprozesses	142
a) Orthonormierungsprozeß für Vektoren	142
b) Verbesserung eines fast orthogonalen Vektors	144
c) Orthonormierungsprozeß für Funktionen	145
d) Gewinnung der Minimalpolynome $P_n(z)$	146
e) Orthonormale harmonische Polynome	147
3.3. Bericht über numerische Experimente	147
a) Orthonormale Polynome für das Einheitsquadrat	147
b) Die Versuche von DAVIS-RABINOWITZ und HOCHSTRASSER	149
c) Die Versuche von BERGMAN-HERRIOT	150
d) Weitere Versuche	152
e) Folgerungen	153
f) Zusatz: Bericht über eine neue Versuchsserie	153

Kapitel IV. Weitere Methoden zur konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete

§ 1. Konforme Abbildung eines Gebiets mit Hilfe harmonischer Interpolationspolynome	154
1.1. Lösung des Dirichletschen Problems mit harmonischen Interpolationspolynomen	155
1.2. Anwendung auf die konforme Abbildung.	157
1.3. Bericht über numerische Experimente	158
1.4. Modifikation des Verfahrens	162
§ 2. Die Methoden von KANTOROWITSCH	163
2.1. Methode der unendlichen, nichtlinearen Gleichungssysteme	163
2.2. Störungsmethode von KANTOROWITSCH	166
2.3. Konforme Abbildung von Gebiet auf Kreis	168
a) Methode der nichtlinearen Gleichungssysteme	168
b) Störungsmethode	168
§ 3. Polygonabbildungen	169
3.1. Die Schwarz-Christoffelschen Formeln; das Parameterproblem	169
3.2. Weitere Methoden der Parameterbestimmung	171
a) Methode von AHLFORS	171
b) Methode von KUFAREV	172
c) Methode von BERGMAN	172
3.3. Spezielle Polygonabbildungen	173
§ 4. Sonstige Abbildungsverfahren	173
4.1. Schmiegunungsverfahren	173
a) Abbildung auf den Einheitskreis	173
b) Abbildung auf die obere Halbebene.	175
4.2. Die Methode der Extrempunkte von LEJA	177
4.3. Analogmethoden	179
a) Gegebene Funktion	179
b) Gegebenes Gebiet	179

Kapitel V. Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete auf Normalgebiete

§ 1. Abbildung auf Normalgebiete	181
1.1. Zusammenstellung der wichtigsten Normalgebiete.	182
1.2. Konforme Abbildung auf einen Kreisring	183
§ 2. Die Methode der Integralgleichungen mit Neumannschem Kern	185
2.1. Konforme Abbildung auf ein Horizontalschlitzgebiet	186
a) Unendliches Gebiet	186
b) Endliches Gebiet.	188

2.2. Konforme Abbildung auf ein Radialschlitzgebiet	190
2.3. Konforme Abbildung auf einen Kreisring	190
a) Ableitung der Integralgleichung	191
b) Bericht über ein numerisches Experiment	191
2.4. Konforme Abbildung auf einen Kreisring nach ROYDEN	192
§ 3. Erweiterung der Methode von THEODORSEN-GARRICK für Ringgebiete	194
3.1. Vorbetrachtungen	194
a) Einige Hilfsfunktionen	194
b) Drei Operatoren in $L_2(-\pi, +\pi)$	195
c) Das Dirichletsche Problem für den Kreisring.	196
3.2. Das Integralgleichungspaar von GARRICK	197
a) Konjugierte Funktionen im Ring.	197
b) Ableitung der Integralgleichungen von GARRICK	198
c) Ermittlung von $f(z)$ für $z \in R$	199
d) Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Gleichungen (3.13) und (3.14)	200
3.3. Iterative Lösung der Integralgleichungen von GARRICK	202
a) Aufstellung der Iterationen; Konvergenzssatz	202
b) Beweis des Konvergenzssatzes	203
3.4. Bericht über numerische Experimente	206
§ 4. Funktionentheoretische Iterationsverfahren	208
4.1. Vorbereitende Sätze und Definitionen	208
a) Verzerrungssatz für Kreisringabbildungen	208
b) Zwei Abschätzungen für Ringgebiete	211
c) Spiegelung von Gebieten	212
4.2. Konforme Abbildung auf einen Kreisring nach KOMATU	214
a) Angabe des Verfahrens	214
b) Konvergenz und Fehlerabschätzung	215
c) Die Form der Kurven C_m	217
4.3. Variationen des Verfahrens von KOMATU.	218
a) Variation des Verfahrens nach HÜBNER	218
b) Variation des Verfahrens nach LANDAU	220
c) Faktorisierung der Kreisringabbildung	220
d) Schmiegeungsverfahren	221
4.4. Numerische Durchführung des Verfahrens von KOMATU an einem Beispiel	222
a) Ausgangsgebiet G_0 und exakte Kreisringabbildung	222
b) Anwendung des Komatu-Verfahrens auf das Gebiet G_0	224
4.5. Konforme Abbildung auf ein Vollkreisgebiet	229
a) Schilderung der beiden Koebeschen Verfahren	229
b) Konvergenz der Verfahren	230

c) Faktorisierung der Vollkreisabbildung	232
d) Bericht über ein Experiment	233
4.6. Konforme Abbildung auf Schlitz- und Lemniskatengebiete	235
a) Iterationsverfahren zur Gewinnung der ϑ -Schlitzabbildung	235
b) Konvergenz des Verfahrens	236
c) Konforme Abbildung auf Lemniskatengebiete	238
d) Zusatz: Faktorisierung und iterative Gewinnung beliebiger schlichter Funktionen	240
§ 5. Verschiedene weitere Methoden zur konformen Abbildung mehrfach zu- sammenhängender Gebiete.	241
5.1. Konforme Abbildung auf Normalgebiete mit Hilfe von Orthonormal- systemen oder der Bergmanschen Kernfunktion	241
5.2. Konforme Abbildung auf Normalgebiete durch Lösung von Extremal- problemen mit direkten Methoden	245
a) Allgemeines Minimumproblem, seine Lösung durch Ritz-Ansatz	245
b) Approximation der Kernfunktion über ein Minimalproblem	248
c) Approximation von $\varphi_{\vartheta}(z)$ über ein Minimalproblem.	248
5.3. Konforme Abbildung eines Ringgebiets auf einen Kreisring durch Lösung von Extremalproblemen	249
a) Verwendung der Methode von 5.2,a)	249
b) Extremalprobleme von KHAJALIA	251
5.4. Übertragung der Methoden von KANTOROWITSCH	253
5.5. Sonstige Methoden	256

Anhang

Anhang 1. Hilfsabbildungen	257
a) Einfacher Zusammenhang.	257
b) Zweifacher Zusammenhang	259
Anhang 2. Literatur über Anwendungsgebiete der konformen Abbildung	259
Anhang 3. Konforme Abbildung veränderlicher Gebiete	260
a) Abbildung von Gebiet auf Einheitskreis	261
b) Abbildung von Einheitskreis auf Gebiet	261
c) Weitere Literatur	262
Anhang 4. Ränderzuordnung bei konformer Abbildung	262
Anhang 5. Einige bekannte konforme Abbildungen	264
Literatur	265
Nachträge	291
Sachverzeichnis	292