

# SOMMAIRE

DU TOME II.

## CHAPITRE XIII.

LES GROUPEB DISCONTINUS DE SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

### *Substitutions linéaires et géométries non euclidiennes.*

	Pages.
Signification géométrique des substitutions linéaires effectuées sur une variable complexe. Groupe anallagmatique du plan. Adjonction des symétries. Points doubles et multiplicateurs. Substitutions elliptiques, hyperboliques, paraboliques, loxodromiques. Trajectoires et lignes de niveau d'une substitution. Les groupes cycliques discontinus et leurs domaines fondamentaux.....	1-14
Étude spéciale des substitutions qui laissent fixe un cercle imaginaire d'équation réelle. Leurs rapports avec le groupe des déplacements sur la sphère et dans le plan de la géométrie elliptique. Formules d'Olinde Rodrigues. Le plan elliptique envisagé comme surface fermée à un seul coté.....	14-25
Étude spéciale des substitutions qui laissent fixe un cercle réel du plan. Invariant différentiel. Rapports de ces substitutions avec le groupe des déplacements de la géométrie de Bolyai. Formules de passage de la métrique non euclidienne de Bolyai à la métrique de Cayley dans le plan hyperbolique. Interprétations diverses. Étude des homographies qui transforment en elle-même une conique réelle. Droites perpendiculaires de la géométrie hyperbolique. Angles, distances, aires. Expression de l'aire d'un triangle.....	25-40
Propriétés communes à la géométrie elliptique et hyperbolique du plan; la géométrie euclidienne comme cas limite.....	40-45
Les substitutions linéaires générales; leur rapport avec les mouvements de la géométrie hyperbolique de l'espace. Étude du groupe des mouvements dans cette géométrie : rotations elliptiques, hyperboliques, paraboliques; mouvements hélicoïdaux, symétries; trajectoires et lignes de niveau. Angles et distances. Passage à la géométrie de Bolyai de l'espace; le groupe des mouvements dans ce dernier espace; les formules de Poincaré. Interprétations diverses.....	45-55
Composition des substitutions et des mouvements de l'espace hyper-	

	Pages.
bolique. Condition pour que le produit de deux substitutions non loxodromiques soit lui-même non loxodromique. Classification des groupes exempts de substitutions loxodromiques.....	55-64
<i>Les groupes discontinus de substitutions linéaires.</i>	
<i>Régions de discontinuité propre.</i>	
Substitutions infinitésimales; définition, exemples; conditions suffisantes pour qu'un groupe renferme des substitutions infinitésimales. Distinction entre les groupes exempts de substitutions infinitésimales et les groupes proprement discontinus; exemples. Étude des suites de fonctions linéaires; familles normales de fonctions linéaires; leur application à l'étude des groupes discontinus; pour qu'un groupe de substitutions soit proprement discontinu dans un domaine, il faut et il suffit : 1° que le groupe soit exempt de substitutions infinitésimales; 2° que les substitutions du groupe forment une famille normale dans le domaine considéré. Conséquences diverses. Étude des ensembles frontières des régions de discontinuité propre; cet ensemble est parfait s'il comprend plus de deux points; s'il est continu, il ne peut être qu'un cercle, une droite ou une ligne non analytique.....	64-83
Étude particulière des groupes à cercle principal; cas où le groupe est discontinu sur certains arcs du cercle principal; cas où les points frontières remplissent toute la circonférence. Exemples.....	83-86
Groupes discontinus dans le cas général. Un groupe de mouvements de l'espace hyperbolique est proprement discontinu s'il est exempt de transformations infinitésimales. Cas où tous les points de la quadriple absolue sont des points frontières de la région de discontinuité. Cas où la discontinuité subsiste dans certaines régions de la quadriple. Groupes kleinéens. Exemples.....	86-96
Invariant différentiel de Lagrange et Schwarz. Application à la construction des groupes discontinus de mouvements sur la sphère; groupes des polyèdres réguliers; invariants.....	96-101

## CHAPITRE XIV.

### CONSTRUCTION DES GROUPES FUCHSIENS ET KLEINÉENS.

#### *Morphologie du domaine fondamental.*

Notion du domaine fondamental. Construction du domaine fondamental d'un groupe discontinu de mouvements du plan hyperbolique par la méthode du rayonnement. Propriétés des polygones rayonnés. Groupes fuchsiens et groupes fuchsoïdes.. .. .	102-106
Un polygone rayonné n'a pas de sommets hyperboliques. Sommets elliptiques, paraboliques, adventifs. Cycles de sommets de ces diverses sortes. Toute classe de points fixes d'une substitution elliptique ou parabolique du groupe admet un représentant sur le périmètre d'un	

	Pages.
polygone rayonné; si le centre du polygone est pris au hasard, il n'existe qu'un sommet elliptique ou parabolique de chaque classe. Sommets adventifs situés sur la conique, cycles ouverts; absence de pointements sur la conique pour un polygone dont le centre est pris au hasard. La présence de sommets adventifs sur la conique caractérise les groupes fuchsien de la seconde classe.....	106-121
Les modifications permises d'un polygone fuchsien et les propriétés caractéristiques qu'elles conservent. Exemples. Absence de sommets hyperboliques pour un polygone quelconque.....	121-125

### *Construction des groupes fuchsien.*

Construction d'un groupe fuchsien au moyen d'un polygone fondamental donné <i>a priori</i> . Démonstration de la discontinuité d'après Poincaré. Extension d'un groupe fuchsien par adjonction d'une symétrie ou d'un mouvement de deuxième espèce.....	125-133
Exemples de groupes fuchsien; groupe de Schwarz; groupe modulaire; groupes de la troisième famille.....	133-139
Genre d'un polygone fuchsien. Application de la formule d'Euler aux polygones de la première et de la deuxième classe. Le genre d'un polygone fuchsien est invariant par une modification permise.....	139-143
Relations fondamentales entre les substitutions génératrices; application au groupe modulaire.....	143-147
Formation des polygones rayonnés d'un groupe de déplacements sur la sphère ou dans le plan euclidien.....	147-154

### *Construction des groupes kleinéens.*

Les polyèdres rayonnés pour les groupes discontinus de mouvements de l'espace hyperbolique. Groupes polyédriques et groupes kleinéens. Classification des arêtes et des sommets. Cycles d'arêtes. Sommets réguliers et semi-réguliers. Existence d'une arête parabolique de chaque classe. Absence de points fixes de substitutions loxodromiques hyperboliques sur la surface du polyèdre.....	154-162
Étude spéciale des groupes kleinéens ou polygonaux. Régions de discontinuité; le nombre de ces régions ne peut être qu'un ou deux, s'il n'est pas infini. Une région de discontinuité est simplement connexe d'ordre de connexion infini. Adjonction de substitutions de deuxième espèce.....	162-170
Modifications permises. Propriétés du polyèdre rayonné invariants par ces modifications.....	170-174
Démonstration de l'existence d'un groupe kleinéen ou polyédrique dont le polyèdre fondamental est donné <i>a priori</i> . Génération d'un groupe kleinéen par un polygone ou un système de polygones donné <i>a priori</i> . Condition d'existence d'une infinité de régions de discontinuité, équivalentes entre elles. Exemples. Étude de divers groupes dérivés des	

	Pages.
symétries par rapport aux quatre faces d'un tétraèdre de l'espace hyperbolique .....	174-188
<i>Structure des groupes fuchsien et kleinéens.</i>	
Relations fondamentales entre les substitutions génératrices d'un groupe.	
Relations primaires. Relations secondaires et sommets idéaux.....	188-192
Genre d'un polygone kleinéen. Exemples .....	192-193
Structure d'un polygone fuchsien ou kleinéen provenant de l'application sur un plan d'une surface de Riemann munie d'un système canonique de coupures. Les substitutions génératrices; cas où leur nombre s'abaisse.....	193-203
Signature d'un polygone fuchsien de la première classe. Existence d'un polygone de signature quelconque. Discussion des cas exceptionnels conduisant à des polygones générateurs de groupes de mouvements du plan euclidien ou du plan elliptique. Exemple de transformation d'un polygone canonique par des modifications permises.....	203-209
Principe de composition des groupes d'après Klein. Composition par emboîtement. Applications.....	209-215
Sous-groupes d'indice fini d'un groupe fuchsien. Relations entre les polygones générateurs d'un groupe fuchsien de la première classe et d'un sous-groupe d'indice fini. Construction de sous-groupes d'un groupe donné. Sous-groupes d'indice 2 du groupe modulaire; ils sont tous invariants. Un groupe fuchsien possède en général au moins un sous-groupe invariant et d'indice donné. Cas d'exception pour les groupes de genre zéro. Exemples de sous-groupes non invariants. ...	215-228
Étude spéciale des sous-groupes invariants .....	228-232

## CHAPITRE XV.

### LES FONCTIONS FUCHSIENNES ET KLEINÉENNES.

#### *Les fonctions automorphes; leur formation par les séries $\theta$ de Poincaré.*

Définitions générales et conséquences. Notion de la variable principale; forme du développement de ces fonctions au voisinage d'un sommet elliptique ou parabolique, lorsqu'on emploie la variable principale. La somme des ordres des zéros et des pôles d'une fonction automorphe (fuchsienne et kleinéenne), contenus dans un polygone fondamental, est égale à zéro. Étude des fonctions automorphes et de leurs dérivées au voisinage des points singuliers paraboliques. Deux fonctions appartenant au même groupe sont liées algébriquement.....	233-245
Construction des fonctions automorphes. Lemmes de Poincaré. Convergence de la série $\sum \left  \frac{dT_{\pi} z}{dz} \right ^2$ ; les deux démonstrations de Poincaré;	

	Pages.
cas où les substitutions dépendent de paramètres variables. Étude de la série $\sum \left  \frac{dT_n \bar{z}}{dz} \right $ ; elle peut être convergente ou divergente. Les séries thêta de Poincaré; convergence; propriétés fonctionnelles, changement linéaire de variables; étude des singularités aux sommets paraboliques. Sommets elliptiques. Construction de fonctions automorphes au moyen des séries thêta.....	245-268
<i>Application d'une surface de Riemann sur le domaine fondamental; équation différentielle des fonctions linéairement polymorphes correspondantes.</i>	
On peut toujours trouver deux fonctions automorphes d'un groupe au moyen desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement. Correspondance entre le polygone générateur du groupe et la surface de Riemann attachée à une relation algébrique d'une certaine classe..	268-272
Les fonctions linéairement polymorphes qui font l'application de cette surface sur ce polygone; la nature de leurs singularités et leur groupe de monodromie; l'équation différentielle du troisième ordre qu'elles vérifient.....	272-275
Formation effective de cette équation différentielle dans le cas du genre zéro; points critiques et paramètres accessoires. Discussion du problème de l'uniformisation au moyen d'une énumération de paramètres. Exemple de Fuchs. Étude du cas de $n = 3$ . L'équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle se ramène l'intégration de l'équation du troisième ordre; application des théorèmes de Fuchs.	275-282
<i>Étude de l'équation différentielle des fonctions linéairement polymorphes : paramètres accessoires et groupe de monodromie.</i>	
L'équation différentielle des fonctions linéairement polymorphes dans le cas d'un genre quelconque; le nombre des paramètres accessoires est donné par le théorème de Riemann-Roch. Discussion du problème de l'uniformisation au moyen d'une énumération de paramètres. Cas où la fonction est dépourvue de points critiques sur la surface de Riemann. Rappel de résultats concernant le problème de l'uniformisation dans le cas de $p = 1$ . Étude de ce même problème pour $p = 2$ ; formation effective de l'équation différentielle du second ordre correspondante; discussion géométrique des conditions exprimant que la variable indépendante est une fonction uniforme du quotient de deux intégrales. Les invariants des substitutions génératrices sont des fonctions entières des paramètres accessoires; les conditions d'uniformité sont des conditions d'inégalité entre ces paramètres. Nature des conditions exprimant que la variable indépendante est une fonction fuchsienne du rapport des intégrales; les conditions transcendantes de Poincaré.....	282-294
Suite de l'étude du groupe de monodromie de l'équation différentielle des fonctions polymorphes. Théorème de M. Picard. Étude particu-	

	Pages.
lière du cas de $p = 1$ ; ce cas est un cas d'exception. Deuxième démonstration du théorème de M. Picard; compléments et conséquences relatives au groupe de monodromie étudié; les deux surfaces de Riemann à une infinité de feuillets qui servent à l'interprétation des résultats analytiques de la discussion. ....	294-310
A deux systèmes distincts de valeurs des paramètres accessoires correspondent deux groupes de monodromie distincts. Conséquences. Le nombre des paramètres essentiels dont dépend le groupe de monodromie est $3p - 3$ . Il existe toujours des valeurs des paramètres accessoires pour lesquelles le groupe de monodromie renferme des substitutions infinitésimales. Extension de ces divers résultats. ....	310-320
Notions sur les fonctions zétafuchiennes. Exemples. Quelques cas particuliers d'un principe général d'uniformisation. ....	320-324
Les fonctions fuchiennes de la deuxième classe dont le domaine d'existence comprend des points voisins de tout point du plan. Forme particulière de certaines séries thêta. Propriété des surfaces de Riemann correspondantes. Surfaces orthosymétriques. Surfaces diasymétriques. Démonstration d'une propriété des surfaces orthosymétriques. Exemples des courbes hyperelliptiques. Cas où le polygone fuchsien appartient à la troisième famille. ....	324-332
Notions succinctes sur l'application au problème de l'uniformisation de l'étude de l'équation de Riccati dans le domaine réel. ....	332-333
Les fonctions kleinéennes de la troisième famille et l'uniformisation; discussion du problème au moyen d'une énumération de paramètres. ....	333-334
Les substitutions du groupe d'une fonction linéairement polymorphe comme fonctions des modules de la surface de Riemann; continuité; à deux systèmes de modules distincts mais suffisamment voisins correspondent deux groupes distincts. Représentation des substitutions génératrices par un point d'un hyperspace; ce point reste toujours extérieur à certaines régions de l'hyperspace choisi; extension au domaine complexe du groupe modulaire généralisé de Poincaré. Examen du cas singulier correspondant au genre 1. ....	334-343
Les théorèmes d'unicité pour la représentation d'une surface de Riemann sur un polygone fuchsien de la première ou de la deuxième classe. ....	343-345

*Propriétés diverses des séries thêta et des fonctions automorphes.*

Propriétés diverses des séries thêta. Démonstration de l'existence de séries thêta dépourvues de pôles à l'intérieur du cercle principal, pour les groupes de genre zéro sans sommets paraboliques; toute fonction fuchsienne est le quotient de deux séries thêta de cette nature. Existence des séries thêta identiquement nulles. Utilité de l'introduction de deux variables homogènes. ....	345-356
Deux fonctions automorphes appartenant à des groupes commensurables sont liées algébriquement; réciproque de ce théorème. Applications. Fonctions fuchiennes appartenant à un sous-groupe d'indice fini	

	Pages.
d'un groupe donné. Théorème de ramification de Klein. Surfaces de Riemann à feuillettes juxtaposés. Cas d'un sous-groupe invariant; résolvantes de Galois et surfaces de Riemann régulières. Applications. Sous-groupe de congruence du groupe modulaire; étude particulière du sous-groupe correspondant à la fonction modulaire d'Hermite; formation de la relation algébrique qui en découle.....	356-369
Les fonctions algébriques n'ayant que trois points critiques sont uniformisables par les fonctions modulaires. Construction de surfaces de Riemann qui conduisent à la formation de sous-groupes d'un groupe donné, par application du théorème de Klein.....	369-379

## CHAPITRE XVI.

LA REPRÉSENTATION CONFORME  
ET L'UNIFORMISATION DES FONCTIONS ALGÈBRIQUES.

*Fonctions harmoniques et représentation conforme.  
Applications à la théorie des fonctions algébriques.*

Le problème de Dirichlet et la solution de Riemann. La méthode d'Hilbert. Quelques lemmes de la théorie des fonctions harmoniques.	380-389
Existence de la solution du problème de minimum d'Hilbert au moyen des suites de fonctions minimisantes. Unicité de la solution.....	389-399
La fonction harmonique $v$ associée à la solution $u$ du problème d'Hilbert; les propriétés de représentation de la fonction analytique $u + iv$ .....	399-405
Solution du problème de la représentation conforme des aires simplement connexes.....	405-410
La représentation conforme d'une aire quasi simple et $N$ -uplement connexe sur un plan muni de fentes rectilignes.....	410-413
Cas d'un domaine d'ordre de connexion infini.....	413-419
Applications à la théorie des fonctions algébriques. Existence des intégrales abéliennes des diverses espèces sur une surface de Riemann donnée <i>a priori</i> . Classe de courbes algébriques correspondant à une surface de Riemann donnée.....	419-424
Quelques cas simples du problème de la représentation conforme; cas d'une aire simple limitée par des arcs de cercle; application à la construction des fonctions fuchsiennes pour les groupes symétriques.....	424-433
Démonstration du principe de continuité de Poincaré dans un cas particulier.....	432-433
<i>L'uniformisation des fonctions algébriques par les fonctions fuchsiennes et par les fonctions kleinéennes.</i>	
Le problème de l'uniformisation par les fonctions fuchsiennes de la deuxième famille. Sa solution effective définie par une suite de substitutions algébriques. Extensions.....	433-445

Le problème général de l'uniformisation des fonctions algébriques au moyen des fonctions fuchsienues de la première classe, de signature donnée. La surface de superposition. Sa représentation conforme sur un cercle. Étude directe des propriétés de la fonction de représentation au voisinage des points frontières de la surface. Démonstration du théorème du cercle limite. Examen des cas d'exception. ....	445-455
Les groupes fuchsienues de signature donnée et de la première classe forment un continuum unique. Étude des cas de dégénérescence. Cas où le genre de la surface de Riemann associée s'abaisse par coïncidence de deux points de ramification. Cas où deux points critiques de la fonction linéairement polymorphe viennent coïncider sur la surface de Riemann. ....	455-462
La correspondance entre le continuum des groupes fuchsienues de signature donnée et celui des surfaces de Riemann signées est continue dans les deux sens. Sa représentation géométrique. Le groupe modulaire généralisé. Étude particulière du continuum des groupes de signature $(1, 1, l)$ . ....	462-482
Le théorème général d'uniformisation au moyen des fonctions fuchsienues de la seconde classe, quand la surface de Riemann donnée est orthosymétrique. ....	482-484
Le théorème général d'uniformisation au moyen des fonctions kleinéennes de la troisième famille. Démonstration de M. Courant. ....	484-495

*Applications à l'étude des propriétés des fonctions analytiques  
et des fonctions algébriques : Théorèmes de M. Picard.*

Application des théorèmes d'uniformisation à l'étude des propriétés des fonctions analytiques et des fonctions algébriques. Les théorèmes de M. Picard. Deux fonctions uniformes dans une région du plan où elles possèdent un point singulier essentiel isolé ne peuvent être liées algébriquement que si le genre de la relation algébrique est zéro ou un. Application à l'étude de l'indétermination d'une fonction au voisinage d'un point singulier essentiel isolé. ....	495-501
Application des fonctions fuchsienues à l'étude des transformations birationnelles d'une courbe en elle-même; cette étude est liée à celle des sous-groupes invariants d'un groupe fuchsien. Le nombre maximum des transformations considérées est $84(p-1)$ si le genre $p$ est $\geq 2$ . Le nombre des points fixes d'une transformation ne dépasse pas $2p+2$ , et ce maximum n'est atteint que par les courbes hyperelliptiques. ....	501-513
Application à la représentation conforme des aires planes à connexion multiple. Toute aire $N$ -uplement connexe est applicable sur une demi-surface de Riemann orthosymétrique. Le nombre des modules de la représentation est $3N-6$ . Cas où certains des continus frontières se réduisent à des points. ....	513-521