

# Table des matières

<b>CHAPITRE</b> - INTRODUCTION .....	1
<b>CHAPITRE I</b> - PRESENTATION GLOBALE .....	3
1 - Propriétés générales .....	3
2 - Le cas compact .....	7
3 - Classification .....	9
a) Le point de vue des revêtements .....	9
b) Le cas compact - Le genre .....	10
4 - Arithmétique des courbes .....	13
a) $k =$ corps de nombres .....	13
b) $k =$ corps fini $\mathbf{F}_q$ .....	14
5 - Annexe : diverses définitions du genre ( $X$ compacte) .....	14
I/ Topologie .....	14
II/ Revêtements .....	15
III/ Corps de fonctions .....	15
IV/ Géométrie analytique .....	15
V/ Géométrie algébrique .....	16
VI/ Géométrie riemannienne .....	17
VII/ Déformations .....	17
<b>CHAPITRE II</b> - TOPOLOGIE .....	19
1 - Surfaces orientables et triangulables .....	19
2 - Classification des surfaces compactes orientables .....	23
<b>CHAPITRE III</b> - EXISTENCE DE FONCTIONS .....	31
1 - Problème de Dirichlet .....	31
2 - Fonctions de Green sur les surfaces hyperboliques .....	34
3 - Fonctions harmoniques sur une surface non hyperbolique .....	36
a) Préliminaires : rappels et exercices sur les différentielles .....	36
b) Existence de fonctions harmoniques .....	38
4 - Fonctions méromorphes .....	41
<b>CHAPITRE IV</b> - THEOREME D'UNIFORMISATION .....	43
1 - Uniformisation des surfaces simplement connexes .....	43

2 - Revêtement universel, surfaces de Riemann générales .....	46
a) Rappels sur le revêtement universel .....	46
b) Application aux surfaces de Riemann.....	47
Etude de quelques exemples .....	47
<b>CHAPITRE V - FONCTIONS ET DIFFERENTIELLES SUR LES SURFACES DE RIEMANN COMPACTES .....</b>	<b>53</b>
1 - Morphismes de surfaces de Riemann compactes.....	53
2 - Différentielles .....	56
3 - Riemann-Roch.....	57
4 - Applications .....	59
<b>CHAPITRE VI - LA SURFACE DE RIEMANN D'UNE FONCTION ....</b>	<b>61</b>
1 - La "variété" (non connexe) des séries de Puiseux.....	61
2 - La surface de Riemann d'une série de Puiseux .....	63
<b>CHAPITRE VII - FONCTIONS ET COURBES ALGEBRIQUES.....</b>	<b>69</b>
1 - La surface de Riemann associée à une courbe algébrique plane .....	69
2 - Surfaces compactes, corps de fonctions, courbes planes.....	71
Lien avec les courbes planes .....	73
3 - Courbes algébriques.....	73
4 - Formule du genre d'une courbe plane.....	76
a) Différentielles holomorphes sur une courbe lisse .....	76
b) Projections de $C_P$ sur $P^1(\mathbf{C})$ .....	77
<b>CHAPITRE VIII - COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX .....</b>	<b>81</b>
1 - Faisceaux .....	81
2 - Cohomologie.....	85
a) Principes généraux .....	86
b) Cohomologie de Čech.....	87
<b>CHAPITRE IX - FINITUDE ET RIEMANN-ROCH .....</b>	<b>91</b>
1 - Théorème de finitude .....	91
2 - Riemann-Roch .....	94
3 - Théorème de dualité de Serre .....	94
a) Définition du résidu $\text{Res} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{C}$ .....	95
b) L'isomorphisme de dualité.....	96
c) Une autre vue de l'isomorphisme de dualité (esquisse) .....	97

4 - Applications de Riemann-Roch .....	98
a) Le genre topologique est égal à $h^1(X, \mathcal{O})$ .....	98
b) Fonctions méromorphes.....	99
c) Résidus de formes différentielles.....	99
d) Plongements projectifs.....	100
<b>CHAPITRE X - EXEMPLES</b> .....	105
1 - Courbes elliptiques .....	105
a) Plongement projectif comme cubique plane.....	105
b) Structure de groupe.....	106
c) Jacobienne .....	107
d) Tores complexes.....	108
2 - Surfaces de Riemann (ou courbes) hyperelliptiques .....	109
Equation plane des courbes hyperelliptiques .....	110
3 - Courbes modulaires.....	112
<b>CHAPITRE XI - POINTS DE WEIERSTRASS, AUTOMORPHISMES.</b> .....	123
1 - Semi-groupes et points de Weierstrass .....	123
2 - Automorphismes.....	128
<b>CHAPITRE XII - JACOBIEUNE D'UNE COURBE ALGEBRIQUE....</b> .....	135
1 - Théorème d'Abel-Jacobi .....	135
Discussion de l'analyticité de $u$ .....	139
Quelques précisions sur l'application $u : X^{(d)} \rightarrow J(X)$ .....	140
2 - Relations bilinéaires de périodes.....	141
Ecriture matricielle.....	142
3 - Aperçu sur Riemann et Torelli .....	144
Application à Torelli .....	147
<b>CHAPITRE XIII - LES SURFACES DE RIEMANN OUVERTES</b> .....	149
1 - Nullité de $H^1(X, \mathcal{O})$ .....	149
2 - Fonctions méromorphes.....	152
<b>PROBLEME D'EXAMEN</b> .....	155
<b>REFERENCES</b> .....	159
<b>INDEX</b> .....	163