

Inhaltsverzeichnis

| | |
|----------------------|----|
| Einleitung | XV |
|----------------------|----|

Kapitel A. Garbentheorie

| | |
|--|----|
| § 0. Garben und Prägarben von Mengen | 1 |
| 1. Garben und Garbenabbildungen | 1 |
| 2. Summengarben, Untergarben, Einschränkungen | 1 |
| 3. Schnittflächen | 2 |
| 4. Prägarben. Der Schnittfunktor Γ | 2 |
| 5. Übergang von Prägarben zu Garben. Der Funktor \tilde{F} | 3 |
| 6. Die Garbenbedingungen G_1 und G_2 | 3 |
| 7. Direkte Produkte | 4 |
| 8. Bildgarben | 5 |
| 9. Garbenverklebung | 5 |
| § 1. Garben mit algebraischer Struktur | 6 |
| 1. Garben von Gruppen, Ringen und \mathcal{A} -Moduln | 6 |
| 2. Garbenhomomorphismen, Untergarben | 7 |
| 3. Restklassengarben | 8 |
| 4. Garben von k -Stellenalgebren | 8 |
| 5. Algebraische Reduktion | 9 |
| 6. Prägarben mit algebraischer Struktur | 9 |
| 7. Zur Exaktheit von \tilde{F} und Γ | 10 |
| § 2. Kohärente Garben und kohärente Funktoren | 10 |
| 1. Endliche Garben | 10 |
| 2. Relationsendliche Garben | 11 |
| 3. Kohärente Garben | 11 |
| 4. Kohärenz trivialer Fortsetzungen | 12 |
| 5. Die Funktoren \otimes und \wedge^p | 13 |
| 6. Der Funktor \mathcal{H}^i , Annulatorgarben | 14 |
| 7. Quotientengarben | 14 |
| § 3. Komplexe Räume | 15 |
| 1. k -algebrierte Räume | 15 |
| 2. Differenzierbare und komplexe Mannigfaltigkeiten | 16 |
| 3. Komplexe Räume, Holomorphen Abbildungen | 17 |
| 4. Topologische Eigenschaften komplexer Räume | 18 |
| 5. Analytische Mengen | 19 |
| 6. Dimensionstheorie | 20 |
| 7. Reduktion komplexer Räume | 21 |
| 8. Normale komplexe Räume | 22 |

| | |
|---|----|
| § 4. Weiche und weiche Garben | 23 |
| 1. Weiche Garben | 23 |
| 2. Weichheit der Strukturgarbe differenzierbarer Mannigfaltigkeiten | 24 |
| 3. Welche Garben | 26 |
| 4. Exaktheit des Funktors Γ für welche und weiche Garben | 27 |

Kapitel B. Cohomologietheorie

| | |
|--|----|
| § 1. Welche Cohomologietheorie | 28 |
| 1. Cohomologie von Komplexen | 28 |
| 2. Welche Cohomologietheorie | 30 |
| 3. Formales De Rham'sches Lemma | 32 |
| § 2. Čech'sche Cohomologietheorie | 33 |
| 1. Čechkomplexe | 33 |
| 2. Alternierende Čechkomplexe | 34 |
| 3. Verfeinerungen. Čech'sche Cohomologiemoduln $\check{H}^q(X, S)$ | 35 |
| 4. Alternierende Čech'sche Cohomologiemoduln $\check{H}_a^q(X, S)$ | 36 |
| 5. Verschwindungssatz für kompakte Quader | 37 |
| 6. Lange exakte Cohomologiesequenz | 38 |
| § 3. Leraysches Lemma und Isomorphiesatz $\check{H}_a^q(X, \mathcal{S}) \simeq \check{H}^q(X, \mathcal{S}) \simeq H^q(X, \mathcal{S})$ | 40 |
| 1. Kanonische Garbenauflösung zu einer Überdeckung | 40 |
| 2. Azyklische Überdeckungen | 42 |
| 3. Leraysches Lemma | 43 |
| 4. Der Isomorphiesatz $\check{H}_a^q(X, \mathcal{S}) \cong \check{H}^q(X, \mathcal{S}) \cong H^q(X, \mathcal{S})$ | 43 |

Kapitel I. Kohärenzsatz für endliche holomorphe Abbildungen

| | |
|---|----|
| § 1. Endliche Abbildungen und Bildgarben | 46 |
| 1. Abgeschlossene und endliche Abbildungen | 46 |
| 2. Die Bijektion $f_*(\mathcal{S})_y \rightarrow \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{x_i}$ | 47 |
| 3. Exaktheit des Funktors f_* | 47 |
| 4. Die Isomorphismen $H^q(X, \mathcal{S}) \cong H^q(Y, f_*(\mathcal{S}))$ | 48 |
| 5. Die \mathcal{O}_y -Modulisomorphie $\check{f}: f_*(\mathcal{S})_y \rightarrow \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{x_i}$ | 49 |
| § 2. Allgemeiner Weierstraßscher Divisionssatz und Weierstraßisomorphismus | 49 |
| 1. Stetigkeit der Wurzeln | 49 |
| 2. Allgemeiner Weierstraßscher Divisionssatz | 50 |
| 3. Der Weierstraßisomorphismus $\mathcal{O}_B^b \simeq \pi_*(\mathcal{O}_A)$ | 51 |
| 4. Kohärenz des Funktors π_* | 52 |
| § 3. Der Kohärenzsatz für endliche holomorphe Abbildungen | 53 |
| 1. Lokaler Projektionssatz | 53 |
| 2. Endliche holomorphe Abbildungen (lokaler Fall) | 54 |
| 3. Endliche holomorphe Abbildungen und Kohärenz | 55 |

Kapitel II. Differentialformen und Dolbeaulttheorie

§ 1. Komplex-wertige Differentialformen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten 57

1. Tangentialvektoren 57
2. Vektorfelder 59
3. Komplexe r -Vektoren 60
4. Liftung von r -Vektoren 61
5. Komplex-wertige Differentialformen 62
6. Äußere Ableitung 63
7. Liftung von Differentialformen 64
8. De Rham'sche Cohomologiegruppen 65

§ 2. Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten 66

1. Die Garben $\mathcal{A}^{1,0}, \mathcal{A}^{0,1}$ und Ω^1 66
2. Die Garben $\mathcal{A}^{p,q}$ und Ω^p 67
3. Die Ableitungen ∂ und $\bar{\partial}$ 69
4. Holomorphe Liftung von (p,q) -Formen 72

§ 3. Das Lemma von Grothendieck 73

1. Gebietsintegrale. Der Operator T 73
2. Vertauschbarkeit von T mit partieller Differentiation 74
3. Cauchysche Integralformel und die Gleichung $T \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f$ 75
4. Lemma von Grothendieck 76

§ 4. Dolbeault'sche Cohomologietheorie 78

1. Lösung des $\bar{\partial}$ -Problems für kompakte Produktmengen 79
2. Dolbeault'sche Cohomologiegruppen 80
3. Analytische De Rham Theorie 82

Supplement zu § 4.1. Ein Satz von Hartogs 82

Kapitel III. Theoreme A und B für kompakte Quader im \mathbb{C}^m

§ 1. Heftungslemmata von Cousin und Cartan 85

1. Lemma von Cousin 85
2. Beschränkte holomorphe Matrizen 87
3. Lemma von Cartan 89

§ 2. Verheftung von Garbenepimorphismen 91

1. Approximationssatz von Runge 92
2. Heftungslemma für Garbenepimorphismen 94

§ 3. Theoreme A und B 98

1. Kohärente analytische Garben über kompakten Quadern 98
2. Formulierung der Theoreme A und B. Reduktion von Theorem B auf Theorem A 99
3. Beweis von Theorem A 100

Kapitel IV. Steinsche Räume

§ 1. Der Verschwindungssatz $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$ 103

1. Steinsche Mengen. Folgerungen aus Theorem B 103
2. Konstruktion Steinscher Kompakta mittels des Kohärenzsatzes für endliche Abbildungen 105

| | |
|---|-----|
| 3. Ausschöpfung komplexer Räume durch Steinsche Kompakta | 105 |
| 4. Die Gleichungen $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$ für $q \geq 2$ | 106 |
| 5. Die Gleichung $H^1(X, \mathcal{S}) = 0$. Steinsche Ausschöpfungen | 108 |
| § 2. Schwache Holomorphiekonvexität und Pflaster | 111 |
| 1. Holomorph-konvexe Hülle | 111 |
| 2. Holomorph-konvexe Räume | 113 |
| 3. Pflaster | 114 |
| 4. Pflasterausschöpfungen. Schwach holomorph-konvexe Räume | 116 |
| 5. Holomorphiekonvexität und unbeschränkte holomorphe Funktionen | 118 |
| § 3. Holomorph-vollständige Räume | 120 |
| 1. Analytische Quader | 120 |
| 2. Holomorph-ausbreitbare Räume | 121 |
| 3. Holomorph-vollständige Räume | 121 |
| § 4. Quaderausschöpfungen sind Steinsch | 122 |
| 1. Gute Seminormen | 122 |
| 2. Verträglichkeitssatz | 123 |
| 3. Konvergenzsatz | 124 |
| 4. Approximationssatz | 125 |
| 5. Quaderausschöpfungen sind Steinsch | 127 |
| Kapitel V. Anwendungen der Theoreme A und B | |
| § 1. Beispiele Steinscher Räume | 129 |
| 1. Standardkonstruktionen | 129 |
| 2. Steinsche Überdeckungen | 131 |
| 3. Resträume komplexer Räume | 132 |
| 4. Die Räume $\mathbb{C}^2 \setminus 0$ und $\mathbb{C}^3 \setminus 0$ | 134 |
| 5. Klassische Beispiele | 137 |
| 6. Steinsche Gruppen | 140 |
| § 2. Cousin-Probleme und Poincaré-Problem | 140 |
| 1. Cousin I-Problem | 141 |
| 2. Cousin II-Problem | 142 |
| 3. Poincaré-Problem | 144 |
| 4. Die exakte Exponentialsequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 1$ | 146 |
| 5. Okasches Prinzip | 149 |
| § 3. Divisorenklassen und lokal-freie analytische Garben vom Rang 1 | 150 |
| 1. Divisoren und lokal-freie Garben vom Rang 1 | 150 |
| 2. Der Isomorphismus $H^1(X, \mathcal{O}^*) \cong LF(X)$ | 151 |
| 3. Divisorenklassengruppe Steinscher Räume | 152 |
| § 4. Garbentheoretische Charakterisierung Steinscher Räume | 154 |
| 1. Zykeln und globale holomorphe Funktionen | 154 |
| 2. Äquivalenzkriterium | 155 |
| 3. Reduktionssatz | 156 |
| 4. Differentialformen auf Steinschen Mannigfaltigkeiten | 158 |
| 5. Topologische Eigenschaften Steinscher Räume | 159 |

| | |
|--|-----|
| § 5. Garbentheoretische Charakterisierung Steinscher Bereiche im \mathbb{C}^m | 161 |
| 1. Induktionsprinzip | 161 |
| 2. Die Gleichungen $H^1(B, \mathcal{O}_B) = \dots = H^{m-1}(B, \mathcal{O}_B) = 0$ | 162 |
| 3. Darstellung der Eins | 163 |
| 4. Charaktersatz | 164 |
| § 6. Topologisierung von Schnittmoduln kohärenter Garben | 166 |
| 0. Frécheträume | 166 |
| 1. Topologie der kompakten Konvergenz | 167 |
| 2. Eindeutigkeitssatz | 168 |
| 3. Existenzsatz | 169 |
| 4. Eigenschaften der kanonischen Topologie | 171 |
| 5. Topologisierung von $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ und $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ | 172 |
| 6. Reduzierte komplexe Räume und kompakte Konvergenz | 173 |
| 7. Konvergente Reihen | 174 |
| § 7. Charaktertheorie Steinscher Algebren | 178 |
| 1. Charaktere und Charakterideale | 179 |
| 2. Endlichkeitslemma für Charakterideale | 180 |
| 3. Die Homöomorphie $\Xi: X \rightarrow X(T)$ | 182 |
| 4. Komplex-analytische Struktur von $X(T)$ | 184 |

Kapitel VI. Endlichkeitssatz

| | |
|---|-----|
| § 1. Quadrat-integrierbare holomorphe Funktionen | 189 |
| 1. Der Raum $\mathcal{O}_h(B)$ | 189 |
| 2. Bergmansche Ungleichung | 190 |
| 3. Die Hilberträume $\mathcal{O}_h^k(B)$ | 191 |
| 4. Saturierte Mengen. Minimumprinzip | 192 |
| 5. Lemma von Schwarz | 192 |
| § 2. Monotone Orthogonalbasen | 193 |
| 1. Monotonie | 194 |
| 2. Untergrad | 194 |
| 3. Konstruktion monotoner Orthogonalbasen mittels Minimalfunktionen | 195 |
| § 3. Meßatlanten | 196 |
| 1. Existenz | 197 |
| 2. Der Hilbertraum $C_h^k(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ | 198 |
| 3. Der Hilbertraum $Z_h^k(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ | 199 |
| 4. Verfeinerungen | 200 |
| § 4. Beweis des Endlichkeitssatzes | 202 |
| 1. Glättungslemma | 202 |
| 2. Endlichkeitslemma | 203 |
| 3. Beweis des Endlichkeitssatzes | 204 |

Kapitel VII. Kompakte Riemannsche Flächen

| | |
|--|-----|
| § 1. Divisoren und lokal-freie Garben $\mathcal{F}(D)$ | 206 |
| 0. Divisoren | 206 |
| 1. Divisoren meromorpher Schnittflächen | 207 |

| | |
|--|-----|
| 2. Garben $\mathcal{F}(D)$ | 208 |
| 3. Garben $\mathcal{O}(D)$ | 209 |
| § 2. Existenz globaler meromorpher Schnittflächen | 209 |
| 1. Die Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F}(D) \rightarrow \mathcal{F}(D') \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0$ | 209 |
| 2. Charakteristikkensatz und Existenztheorem | 210 |
| 3. Verschwindungssatz | 211 |
| 4. Gradgleichung | 212 |
| § 3. Der Satz von Riemann-Roch (vorläufige Fassung) | 212 |
| 1. Geschlecht. Satz von Riemann-Roch | 212 |
| 2. Anwendungen | 213 |
| § 4. Struktur lokal-freier Garben | 214 |
| 1. Lokal-freie Untergarben | 214 |
| 2. Existenz lokal-freier Untergarben | 215 |
| 3. Kanonische Divisoren | 216 |
| Supplement zu § 4. Satz von Riemann-Roch für lokal-freie Garben | 217 |
| 1. Chernfunktion | 217 |
| 2. Eigenschaften der Chernfunktion | 217 |
| 3. Satz von Riemann-Roch | 218 |
| § 5. Die Gleichung $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$ | 218 |
| 1. Der \mathbb{C} -Homomorphismus $\mathcal{O}(np)(X) \rightarrow \text{Hom}(H^1(X, \mathcal{O}(D)), H^1(X, \mathcal{O}(D+np)))$ | 219 |
| 2. Die Gleichungen $H^1(X, \mathcal{O}(D+np)) = 0$ | 220 |
| 3. Die Gleichung $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$ | 220 |
| § 6. Der Dualitätssatz von Serre | 221 |
| 1. Hauptteilverteilungen bzgl. eines Divisors | 221 |
| 2. Die Gleichung $H^1(X, \mathcal{O}) = I(D)$ | 221 |
| 3. Linearformen | 222 |
| 4. Die Ungleichung $\dim_{\mathcal{M}(X)} J \leq 1$ | 223 |
| 5. Residuenkalkül | 224 |
| 6. Dualitätssatz | 225 |
| § 7. Der Satz von Riemann-Roch (endgültige Fassung) | 227 |
| 1. Die Gleichung $i(D) = l(K - D)$ | 227 |
| 2. Formel von Riemann-Roch | 228 |
| 3. Theorem B für Garben $\mathcal{O}(D)$ | 229 |
| 4. Theorem A für Garben $\mathcal{O}(D)$ | 229 |
| 5. Existenz meromorpher Differentialformen | 230 |
| 6. Lückensatz | 231 |
| 7. Theoreme A und B für beliebige lokal-freie Garben | 232 |
| 8. Hodge-Zerlegung von $H^1(X, \mathbb{C})$ | 233 |
| § 8. Spaltung lokal-freier Garben | 234 |
| 1. Die Zahl $\mu(\mathcal{F})$ | 234 |
| 2. Maximale Untergarben | 235 |
| 3. Die Ungleichung $\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{F}) + 2g$ | 236 |
| 4. Spaltungskriterium | 237 |
| 5. Satz von Grothendieck | 238 |

| | |
|---|-----|
| 6. Existenz der Spaltung | 238 |
| 7. Eindeutigkeit der Spaltung | 239 |
| Literatur | 241 |
| Sachverzeichnis | 243 |
| Symbolverzeichnis | 248 |