TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Rectificatifs aux tomes I et II II

Avertissement relatif aux notations VII

Chapitre VII.

Formules et théorèmes d'addition pour les fonctions de Legendre.

113. Généralités. Historique rapide 1

114. Formules préliminaires pour la fonction $P_n(\mu)$, μ étant hors de la coupure d'uniformisation de $P_n^m(\mu)$ $(-\infty, +1)$ 3

115. Formules d'addition classiques pour la fonction $P_n(\mu)$, μ étant hors de la coupure $(-\infty, +1)$ 7

116. Formules d'addition classiques pour la fonction $Q_n(\mu)$, μ étant hors de la coupure $(-\infty, +1)$ 12

117. Formules d'addition classiques pour les fonctions $P_n(\mu)$ et $Q_n(\mu)$, avec $-1 < \mu < +1$ 17

118. Autre formule d'addition pour $Q_n(\mu)$. Cas particulier où

$$\mu = \nu\nu' + \sqrt{(\nu^2+1)(\nu'^2+1)}\,\text{ch}\,\zeta,$$

avec ν et ν' réels et positifs 19

119. Formules d'addition de René Lagrange pour $P_n^m(\mu)$, μ étant hors de la coupure $(-\infty, +1)$, n quelconque et m entier, positif, négatif ou nul 24

120. Les mêmes développements, pour μ compris entre -1 et $+1$ 29

Chapitre VIII.

Les zéros ou racines des fonctions $P_n^m(\mu)$ et $Q_n^m(\mu)$.

121. Généralités. Historique rapide 31

122. Le nombre des racines de $P_n^m(\mu)$, comprises entre -1 et $+1$, pour n et m réels 33

123. Le nombre des racines de $P_n^m(\mu)$, supérieures à un, pour n et m réels 35

124. Le nombre des racines de $P_n^m(\mu)$, comprises entre $-\infty$ et -1, pour n et m réels 37

125. Le nombre des racines complexes (réelles exclues) de $P_n^m(\mu)$, pour n et m réels, aucun de ces deux nombres n'étant entier 39

126. Le nombre des racines complexes (réelles exclues) de $P_n^m(\mu)$, pour n et m réels, l'un au moins de ces deux nombres étant entier 51

127. Le nombre des racines de $P^m_{-\frac{1}{2}+ip}(\mu)$, avec p nombre réel, quelconque, non nul, et m entier. Valeur approchée de ces racines, pour μ assez grand 53
128. L'inexistence de racines réelles ou complexes de $Q_n(\mu)$, pour n entier, positif ou nul, et μ hors de la coupure $(-1, +1)$................ 55
129. Le nombre des racines de $Q_n^m(\mu)$, pour n et m réels, comprises entre 1 et $+\infty$.. 56
130. Le nombre des racines de $Q_n^m(\cos\theta)$, pour n et m réels. Cas particulier où m est nul et n entier, positif ou nul.......................... 58
131. Les diverses équations où l'inconnue est le degré (quelconque) des fonctions de Legendre.. 61
132. Le nombre de racines complexes de l'équation $P_n^m(\cos\alpha) = 0$, avec m et α donnés, réels.. 63
133. Calcul des racines de l'équation en n, $P_n^m(\cos\alpha) = 0$, où α n'est pas voisin de 0 ou de π.. 64
134. Calcul des racines de $P_n^m(\cos\alpha) = 0$, lorsque α est voisin de zéro 67
135. Calcul des racines de $P_n^m(\cos\alpha) = 0$, lorsque α est voisin de π........... 68
136. Les racines en n de $P_n^m(\cos\alpha) = 0$, décroissent lorsque α croît de 0 à $\pi\left(m < 1, \text{ ou } m \text{ entier; } n > -\frac{1}{2}\right)$........................... 71
137. Calcul des racines de l'équation en n, $\frac{d}{d\mu}P_n^m(\mu) = 0$, $\mu = \cos\alpha$. Autre méthode que celle de Macdonald pour la résolution des deux équations précédentes.......................... 72

Chapitre IX.

Applications des fonctions de Legendre aux surfaces de révolution, avec des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales, autres que les coordonnées sphériques.

138. Séparation des variables, dans le cas de l'équation $\Delta u + k^2u = 0$ et de surfaces de révolution.. 77

Ellipsoïde de révolution allongé.

139. Solutions fondamentales de l'équation de Laplace..................... 80
140. Développements de $P_n\left(\frac{z+ix\cos t+iy\sin t}{c}\right)$ et de $Q_n\left(\frac{z+ix\cos t+iy\sin t}{c}\right)$ en séries de solutions fondamentales.......................... 82
141. Résolution des problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur pour un ellipsoïde de révolution allongé.......................... 85
142. Développement de l'inverse de la distance de deux points en série de solutions fondamentales.......................... 90

Ellipsoïde de révolution aplati.

143. Solutions fondamentales de l'équation de Laplace..................... 94
144. Développements de $P_n\left(\frac{iz-x\cos t-y\sin t}{c}\right)$ et de $Q_n\left(\frac{iz-x\cos t-y\sin t}{c}\right)$ en séries de solutions fondamentales.......................... 97
145. Résolution des problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur.......... 99

146. Développement de l'inverse de la distance de deux points en série de solutions fondamentales 101

Tore circulaire.

147. Coordonnées toriques. Introduction des fonctions toriques. Notions sur la résolution des problèmes aux limites, relatifs à l'équation de Laplace, dans le cas du tore 105
148. Fonctions pour l'espace extérieur à un tore donné. Résolution d'un problème de Dirichlet particulier 111
149. Fonctions pour l'espace intérieur à un tore donné 114
150. Développement de l'inverse de la distance de deux points en série de solutions fondamentales 116

Développements des fonctions de certaines classes en séries de fonctions toriques de première ou de seconde espèce.

151. Développement d'une fonction, $F(\cos\theta)$, en série de fonctions de première espèce, $P_{n-\frac{1}{2}}(\cos\theta)$ 118
152. Développement d'une fonction, $f(\mu)$, holomorphe hors de la coupure $(-\infty, +1)$ et d'un cercle centré à l'origine, de rayon aussi petit qu'on veut, en série de fonctions de seconde espèce, $Q_{n-\frac{1}{2}}(\mu)$ 120
153. Exemples de séries de fonctions toriques, $\sum_n a_n P^m_{n-\frac{1}{2}}(\cos\theta)$, $\sum_n a_n P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\zeta)$, $\sum_n a_n Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\zeta)$ 125
154. L'intégrale de Fourier-Legendre 131

Fonctions coniques de Mehler.

155. Définition et introduction de ces fonctions 137
156. Propriétés des fonctions de la variable $\cos\theta$ 140
157. Développement de l'inverse de la distance de deux points en une intégrale de solutions fondamentales de l'équation de Laplace 149
158. Propriétés des fonctions de la calotte sphérique $(\mu = \operatorname{ch}\eta \geqq 1)$ 150
159. Développement de l'inverse de la distance de deux points en une intégrale de solutions fondamentales de l'équation de Laplace 157
160. Théorie de Banerjee des séries de fonctions de Mehler $\sum_{p=0}^{\infty} a_p K_p(\operatorname{ch}\eta)$. Exemples de telles séries 159
161. Représentation d'une fonction quelconque de deux variables par une intégrale triple contenant la fonction K_p. Cas particulier d'une fonction d'une variable, intégrale de Fourier-Mehler 163
162. Application des fonctions de Mehler de la variable $\cos\theta$ à la résolution du problème de Dirichlet relatif à l'équation de Laplace et au demi-cône infini. Autres problèmes résolus au moyen de ces fonctions 170
163. Transformation par inversion. Coordonnées bipolaires de W. Thomson-C. Neumann. Solutions fondamentales de l'équation de Laplace, dans ce système de coordonnées. Développement de l'inverse de la distance

de deux points. Résolution des problèmes de Dirichlet dans le cas de deux sphères qui ne se coupent pas 173
164. Autres solutions fondamentales de l'équation de Laplace dans le cas des coordonnées bipolaires. Résolution du problème de Dirichlet relatif au tore qui coupe son axe ou fuseau 178
165. Application des fonctions de la calotte sphérique à la résolution du problème de Dirichlet relatif à la lentille sphérique 180

Chapitre X.

Fonctions qui se rattachent étroitement à celles de Legendre : polynômes et fonctions de Gegenbauer ou ultrasphériques. Fonctions sphéroïdales.

Polynômes et fonctions de Gegenbauer ou ultrasphériques.

166. Introduction des polynômes et des fonctions de Gegenbauer. Fonction génératrice des polynômes. Équation différentielle de Gegenbauer. Elle se ramène à l'équation associée de Legendre. Relations entre les polynômes et fonctions de Gegenbauer et les fonctions associées de Legendre. Cas particuliers 183
167. Principales propriétés des polynômes de Gegenbauer. Formule de Rodrigues généralisée. Développements simples. Formules de récurrence. Orthogonalité. Représentation par des intégrales. Formule d'addition 190
168. Exemples de séries de polynômes de Gegenbauer 193
169. Cas particulier $\nu = \frac{p}{2}$, où p est entier, supérieur à un. Harmoniques sphériques superficielles à plus de deux dimensions 200
170. Fonctions de Gegenbauer de première et de seconde espèces. Coupures d'uniformisation. Cas où la solution générale de l'équation de Gegenbauer se réduit à un polynôme. Développements simples. Cas où, dans D_n^ν, soit $n + 2\nu - 1$, soit n, est un entier positif ou nul. Intégrales simples. Formules de récurrence. Questions renvoyées aux fonctions associées de Legendre. Bibliographie. Autres notations 205

Notions sur les fonctions sphéroïdales.

171. Historique sommaire 213
172. Étude de l'équation sphéroïdale. Équations limites. Points singuliers. Voisinage des deux points $z = \pm 1$ 214
173. Suite de l'étude de l'équation sphéroïdale. Point à l'infini, exposant caractéristique. Valeurs propres. Fonction $\lambda_n^m(\gamma^2)$ 217
174. Quelques équations différentielles se ramenant à l'équation sphéroïdale 222
175. Fonctions sphéroïdales exprimées par des développements en séries de fonctions associées de Legendre. Propriétés simples de ces fonctions 224
176. Fonctions sphéroïdales exprimées par des développements en séries de fonctions de Bessel sphériques. Propriétés simples de ces fonctions 227
177. Relations entre les fonctions sphéroïdales exprimées au moyen de fonctions associées de Legendre et celles qui sont exprimées au moyen de fonctions de Bessel sphériques 229

Cas où les deux indices n et m sont entiers.

178. Propriétés des fonctions angulaires et des fonctions radiales pour n et m entiers 232

179. Comportement des fonctions sphéroïdales au voisinage des trois points singuliers, $z = \pm 1, \infty$. Valeurs approchées de ces fonctions, des coefficients et des quantités importantes qui dépendent de γ, pour $\gamma \to 0$.... 237
180. Solutions fondamentales de l'équation de Helmholtz en coordonnées sphéroïdales (ellipsoïdes allongés et ellipsoïdes aplatis)........ 239
181. Cas où n et m sont entiers, avec $0 \leq n < m$........ 240
182. Autres développements des fonctions sphéroïdales, valables pour n et m entiers, $n \geq m \geq 0$........ 242
183. Intégrales définies simples contenant des fonctions sphéroïdales. Relations intégrales linéaires entre deux fonctions sphéroïdales. Équations intégrales linéaires vérifiées par ces fonctions........ 245
184. Développements asymptotiques des valeurs propres $\lambda_n^m(\gamma^2)$ et des fonctions sphéroïdales, lorsque l'un au moins des trois paramètres n, m et $|\gamma^2|$ augmente indéfiniment........ 250
185. Développements en séries de fonctions sphéroïdales........ 253
186. Autres notations utilisées. Renseignements bibliographiques. Tables numériques existantes........ 256

ANNEXE I. — Fonctions de Bessel sphériques........ 263

ANNEXE II, — Listes de tables numériques des fonctions de Legendre........ 266

INDEX ALPHABÉTIQUE........ 281

TABLE DES MATIÈRES........ 285