

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Die B- und die Γ-Funktion	1
1.1. Rechenregeln über Faktorielle	1
1.2. Uneigentliche bestimmte Integrale	2
1.2.1. $a_1 + a_2 = \nu$ ganzzahlig	5
1.2.2. $a_1 - a_2 = \nu$ ganzzahlig	6
1.2.3. $a_1 = \nu$ ganzzahlig	6
1.3. Die B -Funktion	7
1.3.1. Eigenschaften der B -Funktion	8
1.3.2. Die B -Funktion für besondere Werte der Variablen	10
1.3.2.1. $p + q = \nu$ ganzzahlig	10
1.3.2.2. $p - q = \nu$ ganzzahlig	11
1.3.2.3. Ganzzahlige Parameter	12
1.4. Definition der Γ -Funktion	13
1.4.0. Beweis der Vertauschbarkeit von Limesbildung und Integration	15
1.4.1. Funktionalgleichung der Γ -Funktion	16
1.4.2. Zusammenhang zwischen B - und Γ -Funktion	17
1.4.2.0. Beweis für die Vertauschbarkeit der Integrationsfolge	18
1.4.3. Eigenschaften der Γ -Funktion	19
1.5. Produktformeln und logarithmische Ableitung der Γ -Funktion. Stirlingsche Reihe 23	23
1.5.1. Eulersche und Weierstraßsche Produktformel	23
1.5.1.0. Die Euler-Mascheronische Konstante	24
1.5.2. Die Funktion $\Psi(z)$	25
1.5.2.1. Die logarithmische Ableitung der Γ -Funktion nach Weierstraß ...	25
1.5.2.2. Die logarithmische Ableitung der Γ -Funktion nach Gauß	26
1.5.3. Die Stirlingsche Formel	27
1.5.3.0. Auswertung zweier Integrale	29
1.5.4. Die Stirlingsche Reihe	30
1.5.4.0. Abschätzungen für großen Imaginärteil des Arguments der Γ -Funktion	32
1.6. Anwendungen der B - und Γ -Funktionen	33
1.6.1. Berechnung von $u_{1,2} = \int_0^{\infty} e^{-a\tau} \tau^p - 1 \frac{\cos}{\sin} k\tau d\tau$	33
1.6.1.1. Sonderfall: Reelle Konstante	34
1.6.1.2. Sonderfall: $a = 0$	34

1.6.2. Berechnung von $v_{1,2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{p-q-1} \varphi \sin^{q-1} \varphi \frac{\cos}{\sin} p \varphi d\varphi$	35
1.6.3. Berechnung von $\int_0^{\pi/2} \cos(p-q) \varphi \cos^{p+q-2} \varphi d\varphi$ und verwandter Integrale ...	36
1.6.4. Verschiedene Integrale	38
1.6.5. Das Dirichletsche Integral	39

§ 2. Allgemeines über Differentialgleichungen

2.1. Lineare homogene Differentialgleichungen beliebiger Ordnung	39
2.1.0. Singuläre Stellen und Stellen der Bestimmtheit	39
2.1.1. Die Wronski-Determinante	42
2.1.2. Transformation der Pole und der Exponenten	44
2.1.3. Verhalten im Unendlichen	45
2.2. Fuchs'sche Differentialgleichungen 2. Ordnung	47
2.2.1. Exponententransformation	47
2.2.2. Beziehungen zwischen den Exponenten	49
2.2.3. Pol-Transformation	50
2.2.4. Reguläres Verhalten im Unendlichen	52
2.2.5. Drei Pole. Riemannsche Differentialgleichung	52
2.2.6. Hypergeometrische Differentialgleichung	53
2.2.7. Konfluenz	55

§ 3. Separation der Wellengleichung

3.0. Wellengleichung und Potentialgleichung	59
3.1. Elliptische Koordinaten	59
3.1.1. Definition der elliptischen Koordinaten	59
3.1.2. Spezial- und Entartungsfälle	61
3.1.2.1. Axiale Symmetrie	61
3.1.2.2. Kugelkoordinaten	62
3.1.2.3. Kegellokoordinaten	62
3.1.2.4. Zylinderkoordinaten	63
3.1.2.5. Paraboloidkoordinaten	63
3.1.2.6. Zusammenhang der Entartungsfälle mit den allgemeinen elliptischen Koordinaten und untereinander	64
3.2. Separation der Wellengleichung in elliptischen Koordinaten	64
3.2.1. Laplace-Operator in elliptischen Koordinaten	64
3.2.1.1. Umrechnung des Linienelements	64
3.2.1.2. Zurückführung des Laplace-Operators auf die metrische Fundamentalförm	65
3.2.1.3. Berechnung des Laplace-Operators in elliptischen Koordinaten	66
3.2.2. Lamésche Wellen- und Potentialgleichung	67
3.2.2.1. Separation der Wellengleichung	67
3.2.2.2. Singularitäten der Laméschen Gleichung	68
3.2.2.3. Lamésche Potentialfunktionen für das Innere eines Ellipsoids	69

3.2.2.4. Die Eigenwerte der Lamé'schen Gleichung sind reell und einfach . . .	70
3.2.2.5. Lamé'sche Potentialfunktionen für das Äußere eines Ellipsoids . . .	70
3.2.3. Entartungsfälle der Lamé'schen Wellengleichung	71
3.2.3.1. Azimutale Gleichung	71
3.2.3.2. Wellengleichung des Sphäroids	72
3.2.3.3. Wellengleichung für den Polarwinkel	73
3.2.3.4. Radiale Gleichung	74
3.2.3.5. Wellengleichung des elliptischen Zylinders	74
3.2.3.6. Wellengleichung des Kreiszyinders	75
3.2.3.7. Wellengleichung in Kegelkoordinaten	76
3.2.3.8. Wellengleichung in parabolischen Koordinaten	77
3.2.3.9. Wellengleichung des Rotationsparaboloids	77
3.2.3.10. Wellengleichung des parabolischen Zylinders	78
§ 4. Die Gaußsche hypergeometrische Funktion	78
4.1. Die Gaußsche Differentialgleichung	79
4.1.1. Die Integration der Gaußschen Differentialgleichung	80
4.1.2. Zusammenhang zwischen den Lösungen der Gaußschen Differentialgleichung	82
4.2. Die Definition der Gaußschen hypergeometrischen Funktion	84
4.2.1. Die hypergeometrische Reihe	85
4.2.1.0. Das Verhalten der hypergeometrischen Reihe auf dem Konvergenz-	
kreis	86
4.2.2. Die Integrale der Gaußschen Differentialgleichung als hypergeometrische	
Funktionen	86
4.2.3. Ableitung weiterer Lösungen der Gaußschen Gleichung	88
4.2.4. Die analytische Fortsetzung der hypergeometrischen Reihe	89
4.2.4.0. Entwicklungen für sehr großes Argument	91
4.2.5. Umlaufrelationen	91
4.3. Die Gaußsche Funktion als Funktion der Parameter	93
4.3.1. Beziehungen zwischen benachbarten Funktionen	94
4.3.1.0. Beziehungen zwischen der Ableitung und benachbarten Funktionen	
.	96
4.3.2. Ganzzahlige Parameter	97
4.3.2.1. Der Parameter a ganzzahlig	97
4.3.2.2. Der Parameter c ganzzahlig	97
4.3.2.3. Die Parameter a und c ganzzahlig	99
4.3.2.4. Summe oder Differenz der Parameter ganzzahlig	99
4.3.3. Lineare Beziehungen zwischen den Parametern a, b, c	99
4.3.3.0. Sonderfälle	103
4.3.4. Die unvollständige B -Funktion	104
4.3.5. Asymptotische Darstellungen für große Werte der Parameter	105
4.3.5.1. Die Methode der Sattelpunkte	105
4.3.5.2. Asymptotische Entwicklung für ${}_2F_1(a, b; c + l; z)$	107
4.3.5.3. Asymptotische Entwicklung für ${}_2F_1(a + l, b - l, c; z)$	110
4.4. Orthogonalisierung der hypergeometrischen Funktion	117
4.4.1. Die Jacobischen Polynome	117
4.4.1.0. Die Nullstellen der Jacobischen Polynome	119
4.4.2. Die Legendreschen Polynome	120

4.5. Verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen	122
4.5.1. Verallgemeinerungen für eine Variable	122
4.5.2. Verallgemeinerungen von Appell für zwei Variable	123
4.5.3. Verallgemeinerungen von Lauricella für n Variable	123
§ 5. Kugelfunktionen	124
5.1. Die Legendresche Gleichung	124
5.1.1. Die Legendreschen Funktionen erster Art	126
5.1.2. Legendresche Funktionen zweiter Art	130
5.1.3. Zusammenhang zwischen den Legendreschen Funktionen erster und zweiter Art	132
5.1.3.0. Sonderfälle: $n = \nu - 1/2$ halbzahlig, $m \pm n = \lambda$ ganzzahlig	135
5.1.4. Umlaufrelationen	137
5.2. Darstellungen der Legendreschen Funktionen	140
5.2.1. Darstellungen in der Umgebung von $z = +1$	140
5.2.1.0. Entwicklungen von $\mathfrak{P}_n^m(z)$ nach $(z-1)/(z+1)$	143
5.2.2. Darstellungen in der Umgebung von $z = -1$	144
5.2.3. Entwicklungen in der Umgebung von $z^2 = 1$	146
5.2.4. Entwicklungen für die Umgebung von $z = 0$	147
5.2.5. Entwicklungen für großes $ z $	147
5.2.6. Entwicklungen nach $z - \sqrt{z^2 - 1}$	149
5.2.6.0. Verhalten auf dem Verzweigungsschnitt	151
5.3. Integraldarstellungen	153
5.3.1. Hypergeometrische Integrale	153
5.3.2. Integrale für Legendresche Funktionen vom Argument $\text{Cos } w$ und $\text{cos } \vartheta$..	156
5.3.3. Laplacesche Integrale	160
5.4. Asymptotische Darstellungen für große Werte von z, n, m	168
5.4.1. Asymptotische Entwicklungen für $ z \gg 1$	168
5.4.2. Asymptotische Entwicklungen für große Indizes	169
5.4.2.1. $ n \gg 1$	169
5.4.2.2. $ m \gg 1$	171
5.5. Rekursionsformeln	172
5.5.1. Rekursionsformeln für zugeordnete Kugelfunktionen	172
5.5.2. Rekursionsformeln für die Kugelflächenfunktionen	178
5.6. Fourier-Reihen und Legendresche Entwicklungen	180
5.7. Additionstheoreme für die Legendreschen Funktionen	184
5.7.1. Das Additionstheorem für $P_n(z)$	184
5.7.1.0. Durchrechnung der Jacobischen Integralformel	186
5.7.2. Das Additionstheorem für $\mathfrak{Q}_n(z)$	187
5.7.3. Erweiterung der Additionstheoreme für $\text{Re}(z) < 0, \text{Re}(z') > 0$	196
5.8. Die Funktionen von Gegenbauer	197
5.8.1. Die Potentialgleichung im n -dimensionalen euklidischen Raum	197
5.8.2. Definition der Funktionen von Gegenbauer	198

5.8.3. Die Differentialgleichung der Funktionen von Gegenbauer	200
5.8.4. Rekursionsformeln	200
5.8.5. Orthogonalitätsgleichungen und Norm	202
5.8.6. Die Legendreschen Polynome als Sonderfall der Gegenbauer-Funktionen	203
§ 6. Die konfluente hypergeometrische Funktion	206
6.1. Zusammenhang zwischen der konfluenten und der Gaußschen hypergeometrischen Funktion	206
6.2. Die Laplacesche Differentialgleichung	207
6.2.1. Die Integration der Laplaceschen Gleichung	207
6.2.2. Die Normalform der konfluenten hypergeometrischen Funktion	210
6.2.3. Zusammenhänge zwischen den Integralen der Laplaceschen Gleichung	211
6.3. Umlaufrelationen	213
6.4. Darstellungen der konfluenten hypergeometrischen Funktion	215
6.4.1. Entwicklungen nach Potenzen von z	215
6.4.2. Asymptotische Darstellungen für große Werte von $ z $	217
6.4.2.0. Abschätzung des Restgliedes	219
6.5. Beziehungen zwischen benachbarten Funktionen. Rekursionsformeln	221
6.6. Sonderfälle für ausgezeichnete Werte der Parameter	222
6.6.1. Ganzzahlige Parameter, $c - a = \nu$ ganzzahlig	223
6.6.2. $c = 2a$	223
6.7. Die Whittakerschen Funktionen	224
6.7.0. Rekursionsformeln für die Whittakerschen Funktionen	226
6.8. Orthogonalitätsbeziehungen. Laguerresche Polynome	228
6.8.1. Laguerresche Polynome	229
6.8.2. Hermitesche Polynome	233
6.9. Sonderfälle der konfluenten hypergeometrischen Funktionen	238
6.9.1. Die Funktionen des parabolischen Zylinders	238
6.9.1.1. Entwicklungen und asymptotische Darstellungen	239
6.9.1.2. Integraldarstellung und Zusammenhang mit den Hermiteschen Polynomen	241
6.9.1.3. Rekursionsformeln	244
6.9.1.4. Orthogonalität	245
6.9.2. Die unvollständige Γ -Funktion und das Fehlerintegral. Fresnelsche Integrale	245
6.9.3. Exponentialintegral, Integralsinus, Integralcosinus, Integrallogarithmus	249
6.9.3.0. Umlaufrelationen, Entwicklungen und asymptotische Darstellungen	252
6.10. Hypergeometrische Funktionen und Laplacesche Transformation	254
6.10.1. Die Integrale von Erdélyi	254
6.10.1.0. Erweiterung auf ein Produkt von Funktionen	256
6.10.2. Die Laplacesche Transformierte der Whittakerschen Funktionen	257
§ 7. Die Zylinderfunktionen	261
7.1. Die Besselsche Differentialgleichung. Definition der Zylinderfunktionen	261

7.2. Entwicklungen der Besselschen Funktionen (im engeren Sinne)	262
7.2.1. Verhalten in der Umgebung von $z = 0$	262
7.2.2. Verhalten im Unendlichen. Asymptotische Darstellungen für große Werte von $ z $	263
7.3. Die Hankelschen Funktionen	264
7.4. Die Neumannschen Funktionen	267
7.5. Umlaufrelationen	268
7.6. Wronskische Determinante und Rekursionsformeln	269
7.7. Verhalten der Funktionen im Nullpunkt	272
7.8. Weitere Fundamentallösungen und Bezeichnungen	274
7.9. Produkte von Zylinderfunktionen	275
7.10. Integraldarstellungen der Zylinderfunktionen	277
7.10.1. Poissonsche Integrale	277
7.10.2. Integrale von Bessel-Sonine-Sommerfeld	282
7.10.2.1. Unmittelbare Ableitung des Sommerfeldschen Integrals	287
7.10.2.2. Sonderfälle des Sommerfeldschen Integrals	288
7.11. Die Zylinderfunktionen mit halbganzem Index $Z_{\nu+1/2}(z)$	292
7.12. Integrale über Zylinderfunktionen	293
7.12.1. Unbestimmte Integrale	293
7.12.2. Bestimmte Integrale	296
7.12.2.0. Zusammenhang mit den Legendreschen Funktionen	301
7.12.3. Diskontinuierliche Integrale von Sonine und Gegenbauer	304
7.12.4. Integrale über Produkte von Bessel-Funktionen. Diskontinuierliche In- tegrale von Sonine und Schafheitlin	307
7.13. Aussagen über die Nullstellen der Zylinderfunktionen	310
7.13.1. Alle Nullstellen mit Ausnahme der Stelle $z = 0$ sind einfach	310
7.13.2. Die Nullstellen von $Z_p(z)$ und $Z_{p+1}(z)$ trennen sich gegenseitig	310
7.13.3. Die Nullstellen von Z_p und Z_p^* trennen sich gegenseitig	310
7.13.4.1. Die von $z = 0$ verschiedenen Nullstellen von $F_p(z) = AJ_p(z) + BzJ'_p(z)$ sind einfach	311
7.13.4.2. Ist $AD - BC \neq 0$ und $p > -1$, so trennen sich die Nullstellen von $F_p(z) = AJ_p(z) + BzJ'_p(z)$ und $G_p(z) = CJ_p(z) + DzJ'_p(z)$ gegenseitig	311
7.13.5. Bei reellem $p > -1$ sind die Nullstellen von $J_p(z)$ reell	311
7.13.6. Die kleinste positive Nullstelle von $J_p(x)$ und $J'_p(x)$ ist größer als p ($p > 0$)	312
7.13.7. Nur Bessel-Funktionen von reellem Index können reelle Nullstellen $\neq 0$ besitzen	312
7.13.8. Die modifizierte Hankel-Funktion (Kelvin-Funktion) besitzt nur für rein imaginäre p positive Nullstellen $\neq 0$	313
7.13.9. Die kleinste positive Nullstelle von $K_p(x)$ mit rein imaginärem p liegt bei $x < p $	313
7.13.10. Hankel-Funktionen von reellem Index besitzen keine positiven Null- stellen, solche von imaginärem Index keine reellen Nullstellen	314

7.13.11. Bei reellem p besitzt $K_p(z)$ keine Nullstellen mit $ \operatorname{phas}(z) \leq \frac{\pi}{2}$	314
7.13.12. Bei rein imaginärem Index besitzt $K_p(z)$ im Bereich $ \operatorname{phas}(z) \leq \frac{\pi}{2}$ nur reelle Nullstellen	316
7.14. Nullstellenkurven und asymptotische Entwicklungen der Zylinderfunktionen ..	316
7.14.1. Entwicklungen für große Beträge des Index p	316
7.14.2. p und z groß und positiv, $p > z$	318
7.14.3. Die Nullstellenkurven sind die Verzweigungsschnitte der asymptotischen Darstellungen	323
7.14.4. Asymptotische Darstellung der Zylinderfunktionen außerhalb der Ver- zweigungsschnitte	324
7.14.5. Mögliche Nullstellenkurven der Zylinderfunktionen	324
7.14.6. Bei $p = \pm z$ entspringen die Nullstellenkurven in den drei Richtungen $(\mp z)^{1/2}$	326
7.14.7. Verlauf der Nullstellenkurven in der p -Ebene für beliebige z	326
7.14.8. Asymptotische Formeln in der Umgebung der Nullstellenkurven	331
7.14.9. Formeln von Nicholson-Schöbe	332
7.14.9.1. Berechnung der Koeffizienten der Nicholson-Schöbeschen Entwicklung	335
7.14.10. Asymptotische Entwicklung für $ p - z \ll z^{1/2} $	337
7.14.11. Nullstellenkurven in der z -Ebene bei festem Index p	338
7.14.12. Nullstellenkurven der Bessel-Funktionen von fast negativem Index ..	341
7.14.13. Nullstellenkurven der Hankel-Funktionen von fast reellem Index	345
7.15. Beispiele von Neumannschen Reihen. Additionstheorem	346
7.15.1. Neumannsche Reihen	346
7.15.2. Additionstheoreme	348
7.16. Entwicklungen nach Eigenfunktionen, Bessel-, Fourier- und Dini-Reihen ..	355
7.16.1. Bessel-, Fourier- und Dini-Reihen	357
7.16.2. Bessel-Fourier-Integrale	359
7.17. Verallgemeinerungen der Zylinderfunktionen	361
7.17.1. Die Angerschen und die Lommel-Weberschen Funktionen	361
7.17.1.1. Entwicklungen für kleine Werte der Variablen	363
7.17.1.2. Bestimmte Integrale	364
7.17.1.3. Asymptotische Darstellungen für großes z	365
7.17.2. Die Airy-Hardyschen Integrale	368
7.17.2.1. Hardysche Integrale für geradzahigen Index	369
7.17.2.2. Hardysche Integrale für ungeraden Index	370
7.17.3. Die Funktion von Struve	372
7.17.3.1. Entwicklung in der Umgebung von $z = 0$	373
7.17.3.2. Asymptotische Darstellung für großes z	374
Schrifttum	375
Namen- und Sachregister	376