

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Auftreten der LAMÉschen, MATHIEUschen und verwandter Differentialgleichungen in physikalischen und technischen Problemen	1
1. Transformation der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ auf elliptische Koordinaten	1
a) Gestrecktes Rotationsellipsoid	2
b) Abgeplattetes Rotationsellipsoid	3
c) Dreiachsiges Ellipsoid	4
d) Elliptischer Zylinder	5
e) Bemerkung über die Benennung „LAMÉsche“ bzw. „MATHIEUsche“ Differentialgleichung	6
2. Wellenmechanische Probleme	7
a) Elektronenbewegung im eindimensionalen Atomgitter	7
b) Quantelung des asymmetrischen Kreisels	8
3. Hydrodynamische Probleme.	8
a) Bewegung von Ellipsoiden und elliptischen Zylindern in idealen Flüssigkeiten	9
b) Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeitsmassen	9
c) Eigenschwingungen des Wassers in einem elliptischen Becken	10
4. Mechanische und elektrische Anfangswertprobleme	10
a) Bewegung eines Massenpunktes in einem periodisch mit der Zeit veränderlichen Kraftfeld	10
b) Elektrizitätsbewegung in einem Schwingungskreis, dessen Elemente periodisch mit der Zeit veränderlich sind	11
c) Stabilitätsuntersuchung nichtlinearer Schwingungsvorgänge	12
II. HILLSche Differentialgleichung.	12
1. Die Differentialgleichungen der mathematischen Physik als Sonderfälle der HILLSchen Gleichung	12
a) Die Differentialgleichung der LEGENDRESchen Polynome	13
b) Die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung	13
2. Allgemeine Sätze über die HILLSche Differentialgleichung	13
a) Labile und stabile Lösungen der HILLSchen Differentialgleichung	14
b) Sätze von O. HAUPT über die labilen und stabilen λ -Werte	14
c) Weitere Fragen über die HILLSche Differentialgleichung	16
3. Die HILLSche Differentialgleichung mit beschränkter Funktion Φ und mit zwei Parametern	16
a) Asymptotische Berechnung des charakteristischen Exponenten.	17
b) Sätze über die Parameterwerte, welche zu stabilen bzw. labilen Lösungen gehören	18
c) Asymptotische Berechnung der ganz- und halbperiodischen Eigenwerte	19
4. Auflösung der HILLSchen Differentialgleichung	20
a) Die HILLSche Lösungsmethode	21
b) HILLSche Funktionen	22

	Seite
III. MATHIEUSche Differentialgleichung	23
1. Allgemeine Auflösung der MATHIEUSchen Differentialgleichung.	23
a) Eigenschaften der Lösungen bei vorgegebenem λ und h	24
b) Berechnung des charakteristischen Exponenten aus der HILL- schen Determinante	25
c) Berechnung des charakteristischen Exponenten nach E. T. WHIT- TAKER	26
d) Berechnung des charakteristischen Exponenten nach E. L. INCE	27
e) Asymptotische Berechnung des charakteristischen Exponenten.	28
2. Periodische Lösungen; MATHIEUSche Funktionen	29
a) Vier Typen MATHIEUScher Funktionen erster Art	30
b) Berechnung der Funktionen erster Art nach E. MATHIEU	31
c) Numerische Ergebnisse von E. MATHIEU	32
d) Berechnung der MATHIEUSchen Funktionen nach E. L. INCE und S. GOLDSTEIN	34
e) Orthogonalitätseigenschaften der MATHIEUSchen Funktionen erster Art	35
3. Verlauf der Grenzkurven zwischen labilen und stabilen Lösungs- gebieten der MATHIEUSchen Gleichung	36
a) Berührung der Grenzkurven für $h = 0$ und $\lambda = n^2$	36
b) Asymptotischer Verlauf der Grenzkurven	37
c) Asymptotisches Verhalten der MATHIEUSchen Funktionen	38
d) Exkurs zu einer verwandten Differentialgleichung	39
4. MATHIEUSche Funktionen zweiter Art	40
a) Zu jedem ganz- bzw. halbperiodischen Eigenwert gibt es nur eine ganz- bzw. halbperiodische Eigenfunktion	41
b) Berechnung der MATHIEUSchen Funktionen zweiter Art nach E. L. INCE und nach B. SIEGER.	41
c) Berechnung der MATHIEUSchen Funktionen zweiter Art nach S. GOLDSTEIN	42
5. MATHIEUSche Gleichung mit einer rein imaginären unabhängigen Veränderlichen.	43
a) Zugeordnete MATHIEUSche Funktionen erster, zweiter und dritter Art; Charakterisierung durch ihr asymptotisches Verhalten.	43
b) Reihendarstellung der zugeordneten Funktionen nach E. HEINE	45
c) Reihendarstellung der zugeordneten Funktionen nach B. SIEGER	46
d) Konvergenzfragen bei diesen Darstellungen	48
6. Allgemeine Bemerkungen über MATHIEUSche Funktionen	48
a) Bemerkungen über die Bezeichnung der MATHIEUSchen Funk- tionen	48
b) Entartungen der MATHIEUSchen Funktionen; WEBER-HERMITE- sche und BESSELSche Funktionen.	49
c) Weitere Fragen über die MATHIEUSche Differentialgleichung.	51
IV. LAMÉSche Differentialgleichung	51
1. LAMÉSche Potentialfunktionen auf einer Ellipsoidfläche	52
a) Aufzählung von vier Arten LAMÉScher Potentialfunktionen auf einer Ellipsoidfläche	52
b) Eigenwerte der Ellipsoidflächenfunktionen; Abzählung der ver- schiedenen Funktionen vorgegebener Ordnung	53
c) Orthogonalitätseigenschaften der Ellipsoidflächenfunktionen	54

	Seite
2. LAMÉSche Potentialfunktionen im Raum	55
a) LAMÉSche Produkte	55
b) Zugeordnete LAMÉSche Funktionen	56
3. Darstellung der LAMÉSchen Potentialfunktionen	57
a) Ausdrücke für die LAMÉSchen Potentialfunktionen bis zur Ordnung $n = 3$	57
b) Rotationssymmetrische Fälle	58
4. LAMÉSche Wellenfunktionen des dreiachsigen Ellipsoids	60
a) LAMÉSche Wellenfunktionen auf einer Ellipsoidfläche	60
b) Orthogonalität der LAMÉSchen Wellenfunktionen auf einer Ellipsoidfläche	61
c) LAMÉSche Wellenfunktionen im Raum	62
d) Asymptotisches Verhalten der LAMÉSchen Wellenfunktionen im Raum	63
e) Andere Konstruktion der LAMÉSchen Wellenfunktionen	64
5. LAMÉSche Wellenfunktionen bei Rotationsellipsoiden	65
a) LAMÉSche Wellenfunktionen auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoids	65
b) Rotationssymmetrische LAMÉSche Wellenfunktionen im Raum	66
c) Berechnung der rotationssymmetrischen Wellenfunktionen nach C. NIVEN	67
d) Berechnung der Eigenwerte λ nach C. NIVEN und R. MACLAURIN	68
e) Berechnung der Koeffizienten a_r und b_r nach C. NIVEN	70
f) Darstellung der rotationssymmetrischen LAMÉSchen Wellenfunktionen durch Reihen BESSELScher bzw. HANKELScher Funktionen	71
g) Bemerkungen zu vorstehenden Reihendarstellungen	73
h) Andere Darstellung der LAMÉSchen Wellenfunktionen durch Reihen BESSELScher Funktionen	73
6. Allgemeine Bemerkungen über LAMÉSche Funktionen	75
a) MATHIEUSche Funktionen als Entartung LAMÉScher Funktionen	75
b) Kugelfunktionen und BESSELSche Funktionen als Entartungen	76
c) Weitere Fragen über die LAMÉSche Differentialgleichung	77
V. Wellenausbreitungsprobleme aus der Physik und aus der Technik.	78
1. Beugung einer ebenen elektrischen oder akustischen Welle an einer elliptischen Öffnung in einem dünnen ebenen Schirm	78
a) Mathematische Formulierung der Aufgabe für elektromagnetische und für akustische Wellen	78
b) Entwicklung der Beugungsfunktionen für eine elliptische Öffnung nach LAMÉSchen Funktionen	80
c) Abmessungen der Beugungsöffnung sehr klein, gemessen an der Wellenlänge. Beugung von Schallwellen	81
d) Entwicklung nach MATHIEUSchen Funktionen im Sonderfall eines Spaltes	82
e) Bemerkung zum HUYGENSSchen Prinzip	85
2. Beugung einer ebenen elektrischen oder akustischen Welle an einem Ellipsoid oder an einem elliptischen Zylinder	86
a) Mathematische Formulierung des Beugungsproblems im elektrischen und im akustischen Fall	86
b) Entwicklung der Beugungsfunktion nach LAMÉSchen Wellenfunktionen beim Ellipsoid	87

	Seite
c) Beugung am abgeplatteten Rotationsellipsoid; insbesondere an einer Kreisplatte	87
d) Bemerkung über das Prinzip von BABINET	88
3. Schallstrahlungsprobleme im Zusammenhang mit einer starren Kreisplatte.	89
a) Schallstrahlung einer frei axial schwingenden starren Kreisplatte	89
b) Sonderfälle sehr großer und sehr kleiner Wellenlänge	90
c) Schwingende Kreisscheibe in einer ebenen kreisförmigen Schirmwand	91
d) Sonderfall einer unendlich großen ebenen Schirmwand	92
e) Schallstrahlungsaufgaben mit hyperboloidisch geformtem Horn	93
f) Bemerkung über zweidimensionale Probleme, die den obigen analog sind	94
VI. Eigenschwingungsprobleme.	95
1. Innenraumprobleme	95
a) Eigenschwingungen eines Luftvolumens, das von einem Ellipsoid begrenzt ist	96
b) Eigenzeitkonstanten ellipsoidischer Leiter	97
2. Außenraumprobleme	98
a) Elektromagnetische Eigenschwingungen eines leitenden gestreckten Rotationsellipsoids	98
b) Gleichung für die Eigenfrequenzen bei unendlich guter Leitfähigkeit	99
c) Sonderfälle der Kugel und des stabförmigen Leiters	100
d) Elektromagnetische Eigenschwingungen eines elliptischen Zylinders	101
VII. Wellenmechanische Probleme.	102
1. Elektronenbewegung im ruhenden Kristallgitter	102
a) Modell für das eindimensionale Kristallgitter.	102
b) Berechnung der Reflexion einer Elektronenwelle an der Grenze eines Gitters	104
c) Theorie der Wellensiebe mit kontinuierlichen Elementen	105
d) Diskussion der Siebgleichung; die klassischen Kettenleiterformeln als Sonderfälle	106
2. Quantelung des asymmetrischen Kreisels.	108
a) Einführung elliptischer Koordinaten; LAMÉsche Funktionen	108
b) Energiewerte als Eigenwerte der LAMÉschen Gleichungen; Numerisches	109
VIII. Literaturverzeichnis	110