

# Inhalt.

## Einleitung.

### Die Einführung der Kugelfunctionen.

	Seite
§ 1. Die Kugelfunctionen entstehen bei der Entwicklung der reciproken Entfernung zweier Punkte von einander nach Potenzen ihrer Entfernungen von einem festen Punkte . . . . .	1
§ 2. Differentialgleichung der Entwicklungscoefficienten . . . . .	4
§ 3. Allgemeines über Inhalt und Anordnung . . . . .	5

## I. Theil.

### Die Kugelfunctionen einer Veränderlichen.

#### Erstes Kapitel.

##### Verschiedene Formen der Kugelfunction.

§ 4. Die Kugelfunction $P^{(n)}(x)$ als Entwicklungscoefficient. Sie ist als endliche hypergeometrische Reihe eine ganze Function von $x$ .	10
§ 5. Gibt, wenn $x = \cos \theta$ gesetzt wird, nach Cosinus der Vielfachen von $\theta$ , oder nach Potenzen der Quadrate von $\sin \frac{1}{2}\theta$ oder von $\cos \frac{1}{2}\theta$ oder $\tan \frac{1}{2}\theta$ oder $\tan \theta$ entwickelt, endliche hypergeometrische Reihen, nach Sinus der Vielfachen von $\theta$ eine unendliche . . . . .	16
§ 6. Sie ist ein $n$ -facher Differentialquotient . . . . .	19
§ 7. Die Wurzeln der Gleichung $P(x) = 0$ sind reell und kleiner als 1	21
§ 8. Ihr Ausdruck durch das Integral von Laplace: Hilfsformel. Verallgemeinerung derselben . . . . .	23

	Seite
§ 9. Fortsetzung: Das Integral wird gefunden, ferner ein ihm gleiches von ähnlicher Gestalt. Entwicklung von $P$ nach Potenzen von $\tan \frac{1}{2}\theta$ . . . . .	35
§ 10. Fortsetzung und Schluss: Die entstandene Gleichung zwischen den beiden Integralen wird durch eine Substitution bewiesen. Verallgemeinerung . . . . .	37
§ 11. Dirichlet's Integral . . . . .	42
§ 12. Die Kugelfunction als Lösung einer Differentialgleichung. Transformation der letzteren . . . . .	47
Zusatz A. Eisenstein's Satz . . . . .	50
Zusatz B. Trigonometrische Reihen . . . . .	53
Allgemeines über den Gegenstand S. 53. — Der zu beweisende 1. und 2. Satz wird aufgestellt S. 58. — Beide werden bewiesen durch den 3. Satz S. 60, und den 4. Satz S. 62.	

## Zweites Kapitel.

### Entwicklung nach Kugelfunctionen.

§ 13. Ueber die Möglichkeit einer Entwicklung. Convergenz . . . . .	64
§ 14. Bestimmung der Coefficienten. Hilfsformeln . . . . .	67
§ 15. Fortsetzung und Schluss: Die Entwicklung ist nur auf eine Art möglich . . . . .	70
§ 16. Entwicklung von $x^n$ als Basis der Entwicklung von Potenzreihen nach Kugelfunctionen . . . . .	71
§ 17. Beispiel: Entwicklung von $(y-x)^{-1}$ . Einführung der Kugelfunction zweiter Art $Q^{(n)}(x)$ als eines Entwicklungscoefficienten. Ihre Darstellung durch eine Potenzreihe, durch ein $(n+1)$ faches Integral. Sie ist eine Lösung der Differentialgleichung im § 12 . . . . .	77
§ 18. Entwicklung einiger anderen Functionen nach Kugelfunctionen erster Art. Cylinderfunction . . . . .	82
§ 19. Entwicklung der trigonometrischen Reihen nach Kugelfunctionen erster Art . . . . .	85
§ 20. Hilfsmittel für solche Entwicklungen. Recursionsformel. Entwicklung von Integralen linearer Differentialgleichungen . . . . .	91
§ 21. Aehnliche Resultate ergeben sich für die Kugelfunction zweiter Art. Sie enthält keine höhere Transcendente als einen Logarithmus	94
Zusatz. Die hypergeometrischen Reihen . . . . .	97
Einführung S. 97. — Differential- und Differenzen-Gleichungen S. 100. — Die verwandten Reihen S. 101. — Umformung der verallgemeinerten Reihen S. 106. — Summation der hypergeometrischen Reihen für besondere Werthe des letzten Elements S. 107. — Functionen $O$ und $\Omega$ S. 109. — Integration einer Differenzgleichung S. 115. — Anwendungen auf die Theorie der elliptischen Functionen S. 120.	

**Drittes Kapitel.**

**Die Kugelfunction zweiter Art. Cylinderfunction.**

	Seite
§ 22. Bei der Einführung war $Q^{(n)}(x)$ nur definiert, so lange $\sqrt{x^2-1} > 1$ . Diese Function kann eindeutig so fortgesetzt werden, dass sie sich, mit Ausnahme des Uebergangs in einen Querschnitt, continuirlich ändert, und der Differentialgleichung (8) genügt, während die Differenz ihrer Werthe auf beiden Seiten des Schnittes in $P^{(n)}(x)$ beträgt. Ihr Verhalten im Querschnitt	125
§ 23. Die Existenz solcher Function wird nachgewiesen, indem man ihren Ausdruck durch eine nach Potenzen von $\xi = x - \sqrt{x^2-1}$ geordnete Reihe findet, die überall mit Ausnahme der Punkte $\pm 1$ convergirt	128
§ 24. Genau dieselbe Function $Q^n(x)$ wird durch ein bestimmtes Integral dargestellt	131
§ 25. Erzeugende Function der $Q$ . Die $Q$ genügen der Differentialgl. (8) bis an den Querschnitt und in demselben, nicht bis in denselben	133
§ 26. Die Function $Q$ , continuirlich so fortgesetzt, dass sie überall (8) erfüllt, giebt eine mehrwerthige Function $q$ , die beim Umkreisen der Punkte $\pm 1$ , und dieser allein sich jedesmal um $\pm in P^{(n)}(x)$ ändert	137
§ 27. Ausdruck von $Q$ durch $P$ , einen genau definirten Logarithmus und eine ganze Function $Z$	140
§ 28. Durch F. E. Neumann's Integral. Aus demselben findet man wieder die Entwicklung des § 23 von $Q^{(n)}$ nach Potenzen von $\xi$ . Digression: Für die ganze Ebene $x$ , ausser einem Querschnitt, gültige Entwicklung von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ und seiner Fortsetzung in eine Potenzreihe. Eine zweite Lösung der Differentialgl. für $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$	144
§ 29. Entwicklung der Kugelfunctionen in Reihen nach aufsteigenden Potenzen von $x$ , nach ab- und nach aufsteigenden von $\sqrt{x^2-1}$	146
§ 30. Differentialgleichung, welche durch Differentiation von (8) entsteht	148
§ 31. Die vielfachen Integrale der Kugelfunctionen $P^{(n)}$ und $Q^{(n)}$ geben Functionen $\mathfrak{P}_\nu^{(n)}(x)$ und $\mathfrak{Q}_\nu^{(n)}(x)$ ,	149
§ 32. Ihre vielfachen Differentialquotienten Functionen $\mathfrak{P}_{-\nu}^{(n)}(x)$ und $\mathfrak{Q}_{-\nu}^{(n)}(x)$	152
§ 33. Zusammenhang von $\mathfrak{P}_\nu^{(n)}$ mit $\mathfrak{P}_{-\nu}^{(n)}$ , von $\mathfrak{Q}_\nu^{(n)}$ mit $\mathfrak{Q}_{-\nu}^{(n)}$	154
§ 34. Digression: Jacobi's Formel für $\sin n\theta$	155
§ 35. Uebertragung der Untersuchungen auf die hypergeometrische Reihe	157
§ 36. Man findet für $Q^{(n)}(x)$ ein dem ersten gleiches Integral von ähnlicher Gestalt. Allgemeiner Fall. Ausdrücke für specielle Werthe von $x$ ,	158
§ 37. Und für den speciellen Werth 0 von $n$	161
§ 38. Imaginäre Substitution in den für $P$ und $Q$ gefundenen Integralen	164
§ 39. Specielle Fälle. Reduction eines allgemeineren Integrales	168
§ 40. Die Werthe der $P^{(n)}(x)$ und $Q^{(n)}(x)$ bei beliebigem $x$ werden für unendlich grosse $n$ bis an die Ordnung $\frac{3}{2}$ mit Hilfe der Reihen,	171

	Seite
§ 41. Bis an die Ordnung $\frac{2}{3}$ mit Hülfe der Integralausdrücke gefunden . . . . .	175
§ 42. $P^{(n)} \cos(\theta n^{-\alpha})$ verschwindet für $n=\infty$ , wenn $0 \leq \alpha < \frac{1}{4}$ ist. $P^{(n)}\left(\cos \frac{\theta}{n}\right)$ und $Q^{(n)}\left(\cos \frac{\theta}{n}\right)$ verwandeln sich für $n=\infty$ in neue Functionen, die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art $J(\theta)$ und $K(\theta)$ . . . . .	182
§ 43. Eigenschaften derselben . . . . .	188
§ 44. Imaginäre Substitution in den Integralen für die Cylinderfunctionen . . . . .	192
§ 45. Nachweis dass die Entwicklung von $(y-x)^{-1}$ nach Kugelfunctionen im § 17 gültig ist so lange $\mathcal{M}(x-\sqrt{x^2-1}) > \mathcal{M}(y-\sqrt{y^2-1})$ . Andere Entwicklungen derselben Function . . . . .	197

**Viertes Kapitel.**  
**Zugeordnete Functionen.**

§ 46. Entwicklung von $(x + \cos \varphi \cdot \sqrt{x^2-1})^n$ nach Cosinus der ganzen Vielfachen von $\varphi$ . Auftreten der Functionen $\mathfrak{B}$ aus § 31 in den Coefficienten . . . . .	200
§ 47. Entwicklung von $(x + \cos \varphi \cdot \sqrt{x^2-1})^{-n-1}$ nach Cosinus der ganzen Vielfachen von $\varphi$ . Der Coefficient von $\cos \nu \varphi$ ist für jedes ganze $\nu$ wesentlich die Zugeordnete erster Art $P_\nu^n(x)$ . Doppelausdruck durch Integrale für dieselbe so lange $\nu \leq n$ . Specielle Fälle $x=1$ , $x=0$ . . . . .	202
§ 48. Entwicklung, wenn statt des reellen $\varphi$ ein complexus gesetzt wird. Die Zugeordnete zweiter Art $Q_\nu^n(x)$ tritt auf . . . . .	208
§ 49. Zusammenstellung der Resultate . . . . .	211
§ 50. Historisches über den Doppelausdruck. Einfacher Beweis desselben nach Jacobi . . . . .	213
§ 51. Differentialgleichung für die Zugcordneten $P_\nu^n(x)$ und $Q_\nu^n(x)$ . Integration derselben durch Reihen, die nach Potenzen von $x$ , $\sqrt{x^2-1}$ , $x-\sqrt{x^2-1}$ , oder $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$ geordnet sind . . . . .	216
§ 52. Die Zugeordnete zweiter Art $Q_\nu^n(x)$ wird durch ein Integral ausgedrückt wenn $\nu$ beliebig gross ist. Doppelausdruck für dieselbe durch Integrale wenn $\nu \leq n$ . . . . .	222
§ 53. Directer Beweis dass die bestimmten Integrale $P_\nu^n$ und $Q_\nu^n$ der Differentialgleich. (36) genügen . . . . .	225
§ 54. Integral von F. E. Neumann für die Zugeordneten zweiter Art . . . . .	229
§ 55. Die imaginäre Substitution . . . . .	230
§ 56. Die Zugeordneten für unendliche Werthe des obern Index $n$ . . . . .	231
§ 57. Die Cylinderfunctionen als Grenze der Zugeordneten . . . . .	232
§ 58. Eigenschaften von Zugeordneten der Cylinderfunctionen $J_\nu$ und $K_\nu$ . Ihre Bestandtheile $j_\nu$ und $k_\nu$ . . . . .	233
§ 59. Fortsetzung: Imaginäre Substitution . . . . .	236

§ 60. Die Functionen $\psi_\nu$ von S. 82 und $\mathcal{U}_\nu$ , welche den Cylinderfunctionen verwandt sind; ihre Bestandtheile $j_{\nu+\frac{1}{2}}$ , $k_{\nu+\frac{1}{2}}$ . Auflösung der Riccati'schen Gleichung in allen Fällen . . . . .	239
§ 61. Recursionsformeln für die Cylinderfunctionen. Ausdruck (44, f) für ihre zweite Gattung. $J_\nu(\infty)$ und $K_\nu(\infty)$ ; zwei Arten der Entwicklung nach Cylinderfunctionen . . . . .	242
§ 62. Entwicklung von Functionen erstens nach $P_\nu^{(n)}$ , sowohl wenn nur $n$ als auch wenn nur $\nu$ veränderlich ist; ferner eine dritte nach $J_\nu$ . . . . .	251
§ 63. Recursionsformeln für die $P_\nu^{(n)}$ und $Q_\nu^{(n)}$ . . . . .	258

**Fünftes Kapitel.**

**Die Kettenbrüche.**

§ 64. Einführung der Kettenbrüche durch ein System linearer Gleichungen. Formale Beziehungen unter den vorkommenden Stücken . . . . .	260
§ 65. Beziehungen welche nicht formaler Natur sind . . . . .	264
§ 66. Entwicklung von Functionen auf zwei Arten. Uebergang von der einen zur andern . . . . .	267
§ 67. Kettenbruch von Gauss; speciell für $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ . Convergenz desselben. Seine Näherungswerthe werden durch Auflösung linearer Gleichungen gefunden. Dasselbe für $\varphi(\alpha, 1, \gamma, q, \xi)$ . Anwendung auf die logarithmische Reihe, wobei $P^n$ und $Q^n$ als Näherungsnenner und Rest auftreten. Jacobi's Methode zur Auflösung der Gleichungen in diesem speciellen Falle	268
Zusatz A. Ueber die Kettenbrüche, auf welche Quotienten hypergeometrischer Reihen führen . . . . .	280
Angabe der Näherungszähler, Nenner und des Restes bei dem Kettenbruch von Gauss S. 280. — Ableitung des Resultates S. 281. — Beispiele S. 283. — Angabe des Resultats, welches sich auf die allgemeinere Reihe $q$ bezieht S. 284. — Beispiele S. 285.	
Zusatz B. Die Kettenbrüche, welche allgemeinere Functionen darstellen . . . . .	286
Form der zu entwickelnden Function $\sigma$ . Die Zähler, Nenner und Reste für die Näherungsbrüche werden durch ein Integral ausgedrückt S. 286. — Wann der Kettenbruch einen Näherungsnenner von einem bestimmten Grade besitzt? S. 288. — Wann von jedem Grade? Eigenschaften dieser Nenner: Ihre Wurzeln; Entwicklung von Functionen nach ihnen, speciell von $(y-x)^{-1}$ S. 290. — Beispiele S. 293.	

**Anhang.**

§ 69. Entwicklung beliebiger Potenzen der Quadratwurzel $T$ auf S. 10	297
§ 70. Kegelfunctionen . . . . .	300

## II. T h e i l.

## Die Kugelfunctionen mit mehreren Veränderlichen.

## Erstes Kapitel.

## Entwicklung der Kugelfunctionen erster Art nach Laplace.

	Seite
§ 71. Einführung neuer Coordinaten in lineare partielle Differentialgleichungen im allgemeinen; speciell in $\Delta V = 0$ , zuerst nach Jacobi's Methode, dann, bei orthogonalen Coordinaten, nach Dirichlet. Ausdehnung auf beliebig viele Veränderliche . . . . .	302
§ 72. Umformungen von $\Delta V$ und ähnlichen Ausdrücken . . . . .	309
§ 73. Das Additionstheorem der Kugelfunctionen erster Art von Laplace wird abgeleitet, . . . . .	311
§ 74. Entwicklungen nach Hansen . . . . .	314
§ 75. Jacobi's Ableitung des Additionstheorems . . . . .	317
§ 76. Uebertragung des Theorems auf den Fall beliebiger Indices $n$ von $P^n(\cos\gamma)$ . . . . .	318
§ 77. Für das Produkt von $P_\nu^{(n)}(\cos\theta)$ in $\cos\nu\psi$ oder $\sin\nu\psi$ wird $C_\nu^{(n)}(\theta, \psi)$ oder $S_\nu^{(n)}(\theta, \psi)$ eingeführt. Verschiedene Formen für die $C$ und $S$ . Sie sind rationale, für $\nu \leq n$ ganze Functionen von $\cos\theta$ , $\sin\theta \cos\psi$ , $\sin\theta \sin\psi$ . Jede Kugelfunction $n$ ten Grades von $\theta$ und $\psi$ ist eine lineare Verbindung der $C$ und $S$ des $n$ ten Grades durch $2n+1$ Constanten. Zusammenhang der homogenen Lösungen von $\Delta V = 0$ mit den Kugelfunctionen . . . . .	320
§ 78. Vorläufiges über Entwicklungen nach Kugelfunctionen von $\theta$ und $\psi$ . . . . .	323
Zusatz. Geometrische Bedeutung der Kugelfunctionen . . . . .	329

## Zweites Kapitel.

## Entwicklung der Kugelfunction zweiter Art und der Cylinderfunctionen nach denselben Methoden.

§ 79. Das Additionstheorem der Kugelfunction zweiter Art wird nach der Methode des § 73 abgeleitet, . . . . .	332
§ 80. Nach der Methode des § 75 . . . . .	333
§ 81. Die fertigen Resultate, wenn $x^2$ , $x_1^2$ und $\varphi$ im Ausdruck $z = xx_1 - \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{x_1^2 - 1} \cos\varphi$ reell sind . . . . .	336
§ 82. Der Bogen $\varphi$ ist imaginär . . . . .	338
§ 83. Additionstheorem für die Cylinderfunctionen . . . . .	340
§ 84. Sein Beweis . . . . .	342
§ 85. Additionstheorem für die Functionen $\frac{\sin x}{x}$ und $\frac{\cos x}{x}$ . . . . .	344

## Drittes Kapitel.

Einführung und Eigenschaften der Lamé'schen Functionen.  
Functionen des elliptischen Cylinders.

§ 86. Ursprung der elliptischen Coordinaten. Einführung von $\mu$ , $\nu$ für $\theta$ und $\psi$ , und von $\varrho$ , $\mu$ , $\nu$ statt der rechtwinkligen Coordinaten $x$ , $y$ , $z$ . . . . .	347
--	-----

§ 87. Zusammenstellung von Bezeichnungen und Formeln . . . . .	353
§ 88. Umformung von $C_m^{(n)}(\theta, \psi) = P^{(n)}(\cos \theta) \cos m\psi$ und $S_m^n$ in elliptische Coordinaten; ferner von $Q_m^{(n)}(\cos \theta) \cos m\psi$ , etc. . . . .	355
§ 89. Einführung der $2n+1$ Lamé'schen Functionen erster Art $E_s^{(n)}(\mu)$ : Man wird für jedes $n$ genau $2n+1$ solcher ganzen Functionen $E$ von $\mu$ , $\sqrt{\mu^2 - b^2}$ , $\sqrt{\mu^2 - c^2}$ des Grades $n$ finden, die bewirken, dass die $2n+1$ Produkte $E_s^{(n)}(\mu)E_s^{(n)}(\nu)$ unabhängige Lösungen der partiellen Differentialgleichung (58, c) sind. Diese Functionen sind die Lamé'schen . . . . .	358
§ 90. Jedes $E(\mu)$ muss daher einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Eintheilung der aufzusuchenden $E$ nach den Irrationalitäten in vier Klassen $K, L, M, N$ . Man setzt $\sigma = \frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ . . . . .	359
§ 91. Für $b=0$ oder $b=c$ müssen die $E$ in die Zugeordneten $P$ übergehen . . . . .	361
§ 92. Aufsuchen der $E$ durch Integration der Differentialgleichung des § 90. Es werden $\sigma+1$ ganze Functionen von $\mu$ , also die $K$ ermittelt. Ihre Coefficienten hängen von den Wurzeln $\mathcal{K}$ einer Hülfsleichung vom Grade $\sigma+1$ ab, die nur verschiedene Wurzeln hat. Beispiele . . . . .	362
§ 93. Fortsetzung: Aehnliches für die $L$ und $M$ . . . . .	365
§ 94. Fortsetzung und Schluss: Aehnliches für die $N$ . . . . .	367
§ 95. Die Lamé'schen Produkte sind auch unabhängige Lösungen. Entwicklungen nach den $E$ bei festem $n$ . . . . .	368
§ 96. Die $E$ werden in endliche, nach Potenzen von $\sqrt{\mu^2 - b^2} - \sqrt{\mu^2 - c^2}$ geordnete Reihen entwickelt . . . . .	371
§ 97. Form der Entwicklung eines jeden $C$ oder $S$ nach Lamé'schen Produkten und umgekehrt; ferner der $E$ erstens nach Zugeordneten, zweitens nach Cosinus oder Sinus der Vielfachen von $\text{coamu}$ . . . . .	375
§ 98. Bestimmung der Coefficienten bei Entwicklungen nach Lamé'schen Produkten . . . . .	377
§ 99. Die Wurzeln von $E=0$ sind reell, verschieden und $\leq c$ . . . . .	381
§ 100. Lamé'sche Function zweiter Art $F$ . Sie ist, abgesehen von einem algebraischen Theile, das Produkt von $E$ und einem elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung . . . . .	384
§ 101. Ueber den Zusammenhang zweier Lösungen einer linearen Differentialgl. zweiter Ordnung, speciell von $F$ mit $E$ . . . . .	388
§ 102. Für jedes $n$ sind $E^{(n)}$ , $F^{(n)}$ und je eine ganze Function $Z^{(n)}$ wesentlich Nenner, Rest und Zähler von einem Näherungswerthe des Kettenbruchs für ein elliptisches Integral erster und zweiter Gattung. in welchem eine Constante $r$ als Wurzel einer algebraischen Gleichung bestimmt ist. Dadurch wird ein Partialnenner nicht vom ersten sondern vom zweiten Grade nach $q^2$ . . . . .	393
§ 102, b. Untersuchungen über Lamé's Differentialgleichungen von Hermite; ferner von Fuchs . . . . .	397
§ 103. Einführung der Functionen des elliptischen Cylinders erster und zweiter Art $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ . Sie sind Grenzen der Lamé'schen. Ihre Differentialgleichung (66). Wodurch die Constanten $\mathfrak{B}$ definirt sind? . . . . .	401

§ 104. Die $\mathfrak{B}$ werden bis zu jeder beliebigen Grösse gefunden. Die $\mathfrak{G}(\varphi)$ der ersten Klasse werden nach Cosinus der Vielfachen der reellen oder imaginären Grösse $\varphi$ in eine convergente Reihe entwickelt, deren Coefficienten Näherungsnenner $N$ des Kettenbruchs (67) sind . . . . .	405
§ 105. Aehnliches gilt für die drei übrigen Klassen der $\mathfrak{G}$ . . . . .	412
§ 106. Dieselben Coefficienten treten auf bei Entwicklung der $\mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{F}$ nach Cylinderfunctionen $J$ resp. $K$ vom Argument $i\lambda \cos \varphi$ . . . . .	413

#### Viertes Kapitel.

### Ueber orthogonale Substitutionen. Anwendung derselben auf Entwicklungen der $\mathfrak{G}$ und $E$ . Entwicklung der Kugelfunctionen nach Lamé'schen Produkten.

§ 107. Bekannte Sätze über Transformation von Formen durch orthogonale Substitutionen . . . . .	415
§ 108. Die allgemeine Form des § 107 geht in die speciellere (69) durch eine orthogonale Substitution über, deren Coefficienten sich geometrisch aus den Coefficienten $a$ der Form construiren lassen. Wesentliche Vereinfachung der Formeln, wenn man von der speciellen Form ausgeht. Sämmtliche Stücke werden dann durch ein System Sturm'scher Reste gegeben, woraus die Realität der Wurzeln der bekannten Gleichung folgt . . . . .	417
§ 109. Beispiel: Die Coefficienten der trigonometrischen Reihen, welche die Functionen des elliptischen Cylinders darstellen, werden aus den Recursionsformeln (66, $b$ ) bestimmt, indem man die Constanten $\mathfrak{B}$ des § 104 so wählt, dass diese Coefficienten einer orthogonalen Substitution mit unendlich vielen Gliedern angehören . . . . .	420
§ 110. Aehnliches für die Entwicklung der Lamé'schen Functionen nach $P_m^{(n)}$ oder in trigonometrische Reihen. Recursionsformeln für die Coefficienten $h$ , . . . . .	421
§ 111. Und für die $g$ oder $g$ ; sie müssen einer orthogonalen Substitution angehören, wodurch auch die Constante $\nu$ bestimmt ist. Die Coefficienten werden für die $K$ gefunden, . . . . .	423
§ 112. Auch für die $L, M, N$ . . . . .	426
§ 113. Specieller Fall $x = 1$ . Summation eigenthümlicher Kettenbrüche . . . . .	427
§ 114. Zahlenbeispiele für specielle Werthe des obren Index $n$ . . . . .	428
§ 115. Entwicklung von $P^{(n)}(\cos \gamma)$ nach Lamé'schen Produkten . . . . .	430

#### Fünftes Kapitel.

### Ueber die Entwicklung von Functionen zweier Veränderlichen nach Kugelfunctionen.

§ 116. Es soll bewiesen werden, dass jede endliche einwerthige Function $f(\theta, \psi)$ des Ortes auf der Oberfläche der Kugel sich nach Kugelfunctionen in eine gleichmässig convergirende Reihe entwickeln lässt . . . . .	432
--	-----



	Seite
§ 117. Der Beweis wird für den Pol ( $\theta = 0$ ) geführt. Resultat wenn $f(\theta, \psi)$ mehrwerthig ist . . . . .	435
§ 118. Zurückführung des allgemeinen Falles auf den speciellen . . . . .	438
§ 119. Specieller Fall, dass $f(\theta, \psi)$ von $\psi$ unabhängig ist . . . . .	441
§ 120. Darstellung einer Function von $n$ Veränderlichen durch ein $n+1$ -faches Integral, mit Hülfe der $j$ . . . . .	442

### III. T h e i l.

## Die Lamé'schen Functionen verschiedener Ordnungen.

#### Erstes Kapitel.

##### Definitionen. Eintheilungen.

§ 121. Erklärung der allgemeinen Lamé'schen Functionen jeder Ordnung . . . . .	445
§ 122. Der speciellen und der Kugelfunctionen, für jede Ordnung. Charakteristische Eigenschaften . . . . .	447

#### Zweites Kapitel.

##### Die speciellen Lamé'schen Functionen. Kugelfunctionen höherer Ordnung.

§ 123. Differentialgleichung der Kugelfunctionen höherer Ordnung . . . . .	449
§ 124. Erzeugende Function für die erste Art. Bezeichnung $P^v(p, x)$ für diese Kugelfunctionen. Verschiedene Ausdrücke für dieselben . . . . .	451
§ 125. Entwicklung von $(x + \cos q \cdot \sqrt{x^2 - 1})^n$ nach $P^v(p, \cos q)$ . . . . .	454
§ 126. Das Additionstheorem für die Kugelfunctionen höherer Ordnung . . . . .	455
§ 127. Zusammenstellung von Formeln . . . . .	458
§ 128. Wie homogene Functionen auf die Kugelfunction führen . . . . .	460
§ 129. Cylinderfunctionen höherer Ordnung $J(p, \theta)$ und $K(p, \theta)$ . Additionstheorem . . . . .	463

#### Drittes Kapitel.

##### Eigenschaften aller Lamé'schen Functionen.

§ 130. Wie die Methode des § 101, zur Ermittlung einer zweiten Lösung von Differentialgl. aus der ersten, sich hier gestaltet . . . . .	464
§ 131. Anwendung derselben, um aus der Function erster Art $\mathcal{E}$ die Function zweiter Art als Abel'sches Integral erster und zweiter Gattung zu ermitteln . . . . .	466
§ 133. $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ sind wesentlich Näherungsnenner und Rest eines Abel'schen Integrales der beiden ersten Gattungen . . . . .	468
§ 134. Partielle Differentialgleich. für das Produkt $p$ und $q$ von $p+1$	

	Seite
resp. $p$ Lamé'schen Functionen $p^{\text{ter}}$ Ordnung. Sie stimmen überein mit den partiellen Differentialgleich. für das Potential resp. für die Kugelfunction im sogenannten Raume von $p+1$ Dimensionen, wenn man in diese Gleich. elliptische statt der rechtwinkligen Coordinaten einführt . . . . .	469

### Viertes Kapitel.

## Ueber die Existenz und Anzahl der Lamé'schen Functionen höherer Ordnung.

§ 135. Satz über die Anzahl der ganzen Functionen gegebenen Grades, welche (88) genügen . . . . .	472
§ 136. Beweis . . . . .	474
§ 137. Anzahl der Lamé'schen Functionen $p^{\text{ter}}$ Ordnung für jeden Grad	477
Zusatz zur S. 417 . . . . .	480

---