

I n h a l t.

I. Theil.

Mechanische Quadratur.

	Seite
§ 1. Historisches. Man soll $\int_{-1}^1 \psi(x) dx$ durch Annäherung berechnen . . .	1
§ 2. Die gegebene Function $\psi(x)$ wird mittelst der Ordinaten, die für willkürliche Abscissen α gegeben sind, angenähert durch eine ganze Function $\varphi(x)$, ferner $\int_{-1}^1 \varphi(x) dx$ genau durch die Summe (4), also $\int_{-1}^1 \psi(x) dx$ angenähert durch die Summe (4) dargestellt	3
§ 3. Beziehungen zwischen den in (4) vorkommenden Hilfsgrößen A . . .	5
§ 4. Cotes wählt solche Abscissen α , die in einer arithmetischen Reihe wachsen. Tafel für die numerischen Werthe der A nach Cotes	6
§ 5. Berechnung des Fehlers $D\psi(x)$, den man, bei der angenäherten Berechnung von $\int_{-1}^1 \psi(x) dx$ durch (4), begeht	6
§ 6. Berechnung einer Correction für die Cotesische Methode	7
§ 7. Gauss wählt die n Abscissen α so, dass der Fehler Null wird, wenn $\psi(x)$ eine ganze Function $2n-1$ ten Grades ist	9
§ 8. Er nimmt dazu für die α die n Wurzeln der Gleichung $P^{(n)}(x) = 0$. Correction bei dieser Methode	10
§ 9. Kurze Ableitung der hauptsächlich im § 8 gewonnenen Resultate	13
§ 10. Tafeln von Gauss zur Berechnung der Integrale durch Annäherung	14
§ 11. Die Function $\psi(x)$ lässt sich mit beliebiger Näherung zwischen $x = -1$ und $x = 1$ durch die Interpolationsformel darstellen, wenn $\psi(x)$ sich in eine Potenzreihe nach x entwickeln lässt, welche für $x = 1$ convergirt. Beweis	16
§ 12. Uebertragung der Methode von Gauss auf die Berechnung durch Annäherung der Integrale $\int_g^h \psi(x)f(x) dx$ für beliebige Functionen ψ , wenn f eine vorgegebene Function bezeichnet	19

	Seite
§ 13. Beispiel für den Fall, dass $f(x)$ von der Form $x^a(1-x)^b$ ist. Der Fall $a = b = -\frac{1}{2}$	22
§ 14. Ein anderer specieller Fall. Wie wählt man für eine Quadratur aus $m+n$ Abscissen möglichst vortheilhaft n Abscissen, wenn m Abscissen vorgeschrieben sind?	25
§ 15. Die ganze Function $q(x)$ des § 2 wird in eine merkwürdige Form gebracht.	27
§ 16. Diejenige ganze Function n^{ten} Grades y , welche $\int_g^h [y-\psi(x)]^2 f(x) dx$ zu einem Minimum macht, ist die Summe der ersten Glieder, vom 0^{ten} bis zum n^{ten} , in der Entwicklung von $\psi(x)$ nach den Näherungsnennern des Kettenbruchs für $\sigma = \int_g^h f(z) \frac{dz}{x-z}$. Specieller Fall $f(z) = 1$	29

II. Theil.

Das Potential.

Erstes Kapitel.

Allgemeines über das Potential. Die Kugel.

- § 17. Ueber die Grundsätze der mathematischen Physik. Fassung des Newton'schen Gesetzes. Bedeutung der Ausdrücke Kraft, Masse. Zerlegung eines Körpers in Kugeln, mit beliebiger Annäherung. Potential V und Anziehungscomponenten Ξ, II, Z eines Aggregates von homogenen kleinen Kugeln; eines zusammenhängenden Körpers in einem Punkte des leeren Raumes. Die Summen verwandeln sich in dreifache Integrale. Potential und Anziehung eines Körpers in einem solchen Punkte μ des Raumes, welcher mit Masse erfüllt ist. Differentiation unter dem Integrale. Die Componenten Ξ_μ , etc. sind Differentialquotienten von V_μ . Eigenschaften, welche das Potential V eines Körpers besitzt 31
- § 18. Potential und Anziehung einer Kugel. Bezeichnung. Potential einer Kugel und einer durch zwei concentrische Kugelflächen begrenzten Schale in Punkten O_α, O_i und O_μ . Ist die Dichtigkeit k eine ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten, so ist auch V_i eine ganze Function von x, y, z , und V_α eine solche dividirt durch eine ganze Potenz von r 43
- § 19. Specielle Fälle. Die Dichtigkeit k jedes Punktes ist 1, oder eine Function seiner Entfernung vom Mittelpunkte, oder eine ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten. Eine Kugel, deren Dichtigkeit in jedem Punkte proportional seiner positiven oder negativen Entfernung von einem festen grössten Kreise ist, wirkt wie ein Magnet auf einen entfernten Pol 47
- § 20. Allgemeines über das Potential von Schalen, die durch zwei willkürlich gegebene Flächen \mathcal{U} und \mathcal{G} begrenzt werden. Specielles wenn die Dichtigkeit constant ist. Man findet: Eine durch zwei beliebig gelegene Kugelflächen begrenzte homogene Schale übt auf alle im hohlen Raume befindlichen Punkte eine constante Kraft aus. Das-

selbe gilt für eine Schale, welche durch zwei nicht concentrische ähnliche Ellipsoide mit parallelen Axen gebildet wird	51
§ 21. Ausdruck von V für die Schalen des § 18 in allen Punkten des leeren Raumes, wenn der Werth dieses Potentials in den begrenzenden Kugelflächen gegeben ist. Summation der Reihen	55
§ 22. Aus der Elektrostatik. Einführung des Flächenpotentials v . Es wird für die Kugelfläche gefunden, wenn α , die Dichtigkeit der Belegung, gegeben ist. Angenähert lässt sich v_i in O als ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten von O , und v_α als eine solche, dividirt durch eine Potenz der Entfernung des Punktes O vom Mittelpunkt der Kugel darstellen. — Eigenschaften des Flächenpotentials. Bestimmende Eigenschaften $a-c$. Statt α , der Dichtigkeit der Belegung, kann der Werth von v auf der Fläche gegeben sein. Ob für jede Fläche ein Potential v existirt, welches sich auf der Fläche in eine willkürlich gegebene continuirliche Function des Ortes verwandelt? Die Aufgabe von Gauss, die Wirkung einer Masse in den leeren Raum durch Belegung der Grenzflächen zu ersetzen. Zerlegung in drei Aufgaben 1, 2 oder 2' und 3	60
§ 23. Erste Methode zur Lösung der Aufgabe 2' für eine Kugelfläche oder für zwei concentrische Kugelflächen. Der Werth von α	70
§ 24. Wenn die Dichtigkeit der Masse k im Innern der Kugelschale gegeben ist, wird die Dichtigkeit α für die ideale Belegung der Grenzflächen gefunden	73
§ 25. Anwendungen auf die Theorie des Erdmagnetismus. Ideale Vertheilung der magnetischen Massen auf der Erdoberfläche. Wo ist der Sitz der Kraft? Enthält die Erde positiven und negativen Magnetismus in gleicher Menge?	75
§ 26. Zweite Methode zur Lösung der Aufgabe 2' für eine Kugel: Integration einer partiellen Differentialgleichung	80
§ 27. Der Ausdruck für das Flächenpotential wird verificirt	83
§ 28. Die Reihe für die Dichtigkeit α kann divergiren, während α endlich bleibt und bestimmt ist. Ausdruck von α durch ein Integral	85
§ 29. Die Lösung der Aufgabe 2' wird auf das Aufsuchen der Green'schen Function zurückgeführt. Eine ähnliche Function für elektrodynamische Probleme. Die Green'sche Function als Potential einer Flächenbelegung mit der Dichtigkeit α_0 . Wie man α_0 aus der allgemeinen Lösung von 2' finden kann	88
§ 30. Die Green'sche Function für die Kugel	94
§ 31. Bestimmung der Massenvertheilung auf einer Fläche, welche von einer Kugel wenig abweicht, wenn das Potential der Masse auf der Fläche bekannt ist	96

Zweites Kapitel.

Das Rotationsellipsoid. Der Kreis.

§ 32. Entwicklung von T , der reciproken Entfernung zweier Punkte, nach Kugelfunctionen. Erste Methode. Man findet Gleich. (7)	98
§ 33. Zweite Methode	102

§ 34. Bestimmung der Potentiale V und v wenn die Dichtigkeit der Masse, k oder κ , bekannt ist	106
§ 35. Specielle Fälle. Wenn die Dichtigkeit k in jedem Punkte der Schale eine ganze Function von $\cos \eta$, $\sin \eta \cos \omega$, $\sin \eta \sin \omega$ ist, so wird V_i in O eine ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z von O , und V_α eine ganze Function von $\cos \theta$, $\sin \theta \cos \psi$, $\sin \theta \sin \psi$; in Bezug auf r ist V_α von der Form $A + B[\log(r+1) - \log(r-1)]$, wo A und B rationale Functionen von r und $\sqrt{r^2-1}$ bezeichnen. Weitere Vereinfachungen, wenn k im Punkte $[a, b, c]$ eine ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten a, b, c ist	110
§ 36. Bestimmung des Potentials V im leeren Raume, wenn es auf begrenzenden Ellipsoiden gegeben ist. War V_i auf der Oberfläche eine ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten, so bleibt V_i eine solche im ganzen Innern	113
§ 37. Lösung der Aufgabe 2' im § 22 für das Rotationsellipsoid. Ideale Vertheilung von Masse auf der Oberfläche, welche die wirkliche Vertheilung ersetzt	115
§ 38. Zweite Methode zur Lösung von 2'. Convergenz der Reihe für v	117
§ 39. Dieselbe Methode verschafft die Reihe für T , welche in § 32 und 33 vorkommt	124
§ 40. Die Green'sche Function G und die entsprechende Belegung mit Masse	125
§ 41. Das Potential eines mit Masse belegten Kreises wird im ganzen Raume gefunden, wenn es auf der Kreisfläche willkürlich gegeben ist	127
§ 42. Besonderer Fall. Schlussbemerkungen	132

Drittes Kapitel.

Das dreiaxige Ellipsoid.

§ 43. Entwicklung von T nach Kugelfunctionen $\mathfrak{F}^{(n)}$. Erste Methode	136
§ 44. Das schliessliche Resultat. $\mathfrak{F}^{(n)}$ ist eine Kugelfunction n ten Grades in Bezug auf θ, ψ ; ebenso in Bezug auf η und ω ; ferner eine ganze Function der Coordinaten a, b, c , und enthält in Bezug auf ρ keine höhere Transcendente als ein elliptisches Integral erster und zweiter Gattung	141
§ 45. Das Potential V , wenn die Dichtigkeit k , und v , wenn κ gegeben ist	148
§ 46. Beispiel: Das Potential eines homogenen Ellipsoides wird aus den allgemeinen Formeln berechnet. Ein Verfahren zur Berechnung der Anziehung eines homogenen Ellipsoides, nach einem Vortrage von Gauss im Sommersemester 1840 mitgetheilt.	152
§ 47. Bestimmung des Potentials im leeren Raume, wenn es auf der Begrenzung bekannt ist, nach der ersten Methode, aus der Reihe für T . Man erhält das fertige Potential nach Auflösung eines Systems linearer Gleichungen	162
§ 48. Nach der zweiten Methode, durch Integration einer Differentialgleichung. Das Potential wird durch die vorige Form und durch eine zweite, mit Hülfe der Lamé'schen Functionen, ausgedrückt	164
§ 49. Vergleichung der Formen, in welchen das Potential der Kugel, des Rotationsellipsoides und des dreiaxigen Ellipsoides auftritt. Entwicklung von T nach Lamé'schen Functionen	169

Viertes Kapitel. Der Cylinder.

§ 50. Entwicklung von T in Reihen. Man findet zwei verschiedene Reihen	Seite 173
§ 51. Das Potential V eines Cylinders mit kreisförmiger Directrix wird gefunden, wenn die Masse gegeben ist und innerhalb des Cylinders liegt . . .	175
§ 52. Besonderer Fall: Die Dichtigkeit ist constant. Ursprung des logarithmischen Potentials. Der Cylinder von endlicher Höhe. Grenzfall: Das Potential des Kreises. Erster Ausdruck desselben. Zweiter Ausdruck. Anziehung des Kreises für ein von dem Newton'schen verschiedenes Anziehungsgesetz. Ueber das Potential der Ellipse	178
§ 53. Das Potential V , wenn die Masse ausserhalb des Cylinders liegt (cf. § 51)	184
§ 54. Das Potential v eines Cylinders zu finden, wenn es auf der Begrenzung gegeben ist. Die Axe des Cylinders geht von $-\infty$ zu ∞ . Specieller Fall, wenn das Potential unabhängig von der x -Coordinate wird	185
§ 55. Fortsetzung: Dieselbe Aufgabe für einen Cylinder von endlicher Höhe, zunächst für den Grenzfall, dass v auf einer oder auf zwei parallelen unendlichen Ebenen gegeben ist	189
§ 56. Fortsetzung: Das Potential einer Kreisfläche, welches sich auf derselben in 1 verwandelt. Der Cylinder von endlichen Dimensionen wird nach zwei verschiedenen Methoden behandelt	191
§ 57. Schluss: Die Axe des Cylinders erstreckt sich von 0 bis ∞ . Specielle Fälle	195
§ 58. Das Potential des Cylinders, dessen Basis eine Ellipse ist	202
§ 59. Ueber schwingende kreisförmige oder elliptische Membranen. Wie man die Kreise und Geraden findet, welche Knotenlinien der kreisförmigen, wie die confocalen Ellipsen und Hyperbeln, welche Knotenlinien der elliptischen Membranen sind	208
Zusatz. Ueber Entwicklungen nach Cylinderfunctionen	210
Einleitung. Zunächst handelt es sich um die Cylinderfunctionen zweiter Ordnung. Der Ausdruck von $J_\nu(r)$ durch J_0, J_1 und ganze Functionen von r S. 210. — Der Werth eines Integrals wird bestimmt. Die Gleichung $J_\nu(\lambda r) = 0$ und eine zweite besitzen nur reelle Wurzeln S. 211. — Die Entwicklung von $f(r)$ nach Functionen $J_\nu(\lambda r)$ wird aufgefunden, ihre Möglichkeit vorausgesetzt. Allgemeiner Fall in dem sie möglich ist S. 212. — Das Entsprechende für Entwicklungen nach Cylinderfunctionen $\psi_\nu(\lambda r)$ der dritten Ordnung S. 213, — und nach Functionen $\sin \lambda r$ und $\cos \lambda r$ S. 215. — Allgemeines über derartige Entwicklungen S. 215. —	

Fünftes Kapitel. Der Kegel.

§ 60. Die Entwicklung von T mit Hülfe des Fourier'schen Doppelintegrals führt auf die Kegelfunction $P^\mu(x)$. Ausdruck dieser Function, die

für jedes reelle x reell bleibt, als arithmetisches Mittel von $\Re^{\mu}(x \pm 0.i)$; durch verschiedene Integrale. \mathfrak{F}^{μ} für ein unendliches μ	217
§ 61. Das Additionstheorem der Kegelfunctionen wird ausgesprochen. Vorbereitung zum Beweise. Die Kegelfunction ist im wesentlichen eine Kugelfunction mit imaginärem Index, nämlich $\mathfrak{F}^{\mu}(x) = P^{-\frac{1}{2} + \mu i}$ und $\pi \mathfrak{F}^{\mu}(-x) = \cos \mu \pi i [Q^{-\frac{1}{2} + \mu i}(x) + Q^{-\frac{1}{2} - \mu i}(x)]$	224
§ 62. Die Differentialgleichung für \mathfrak{F} ; daraus die der Kugelfunctionen \mathfrak{F}^{μ} . Sie ist dieselbe, welcher P^n und Q^n für $n = -\frac{1}{2} + \mu i$ genügen. Gleichungen aus § 61 werden bewiesen.	226
§ 63. Das Additionstheorem des § 61 wird bewiesen.	230
§ 64. Ausdruck der Kegelfunctionen erster und zweiter Art durch dieselbe hypergeometrische Reihe. Zweite Form des Additionstheorems. Anwendung: Entwicklung von $\mathfrak{F}^{\mu}(\cos \varphi)$ nach Cosinus der Vielfachen von φ	237
§ 65. Darstellung von T durch Kegelfunctionen. Lösung von Aufgaben über das Potential des Kegels. Green'sche Function. Dichtigkeit der Masse auf dem Kegelmantel; im Scheitel	242
Zusatz. Ueber die Differentiation trigonometrischer Reihen	250

Sechstes Kapitel.

Die Methode der reciproken Radii vectores. Zwei Kugeln. Rotirendes Kreissegment.

§ 66. Prinzip der Abbildung vom Punkte γ aus. Bezeichnung. Beziehung zwischen Gegenstand und Bild; zwischen dem Potential des Gegenstandes und des Bildes; zwischen der Dichtigkeit der Belegung auf der gegebenen und der abbildenden Fläche	251
§ 67. Allgemeines über den Gegenstand dieses und des folgenden Kapitels. Das Bild einer Kugel ist eine Kugél. Analytische Formeln zur Bestimmung des Bildes. Anwendung: Die Green'sche Function wird für eine Kugel gefunden	255
§ 68. Das Problem der zwei Kugeln, die sich weder berühren noch schneiden, wird formulirt. Man bildet vom Punkte γ eines Punktenpaares α, γ ab, welches zu zwei gegebenen Punktenpaaren b_0, d_0 und b_1, d_1 harmonisch ist. Analytische Ausdrücke für die gesuchten Stücke aus den gegebenen. Zusammenstellung der Formeln	261
§ 69. Lösung des Problems der zwei Kugeln, die sich weder berühren noch schneiden. Ideale Vertheilung der Masse auf den Kugelflächen	267
§ 70. Die Green'sche Function	270
§ 71. Die Kugeln berühren sich. Das Potential v ; die Dichtigkeit α der idealen Belegung. Die Green'sche Function. Dichtigkeit der Elektrizität, welche ein elektrischer Punkt auf einer Kugel und einer unendlichen Platte hervorruft, wenn die Kugel die unendliche Platte berührt	271
§ 72. Durch Drehung eines Kreissegments um seine Sehne entsteht eine Fläche. Das Potential v ihrer Belegung, die Green'sche Function G und die Dichtigkeit der idealen Belegung werden aus den entsprechenden Stücken beim Kegel gefunden	280

Siebentes Kapitel.**Der Ring. Kugelkalotte.**

	Seite
§ 73. Einführung der Thomson'schen Coordinaten	283
§ 74. Entwicklung von T nach Cosinus der Vielfachen von $(\theta - \eta)$, und zugleich nach Kugelfunctionen mit einem oberen Index, der eine halbe ungerade Zahl ist. Das Potential des Ringes wird gefunden, ferner die Green'sche Function und die zu ihr gehörende Dichtigkeit	285
§ 75. Die Kugelkalotte; allgemeiner linsenförmiger Körper. Darstellung von T durch ein Integral. Die Green'sche Function und die zu ihr gehörende Dichtigkeit, als einfaches Integral, in besonderen Fällen als endliche Reihe. Das Potential der Linse. Darstellung einer Function auf einer Kalotte durch ein dreifaches Integral	291
§ 76. Rückblick auf die Lösung der Potentialaufgaben für Rotationskörper. Ueber den Rotationskörper, dessen Meridian eine Lemniscate ist	300

III. Theil.**Analytische Theorie der Wärme.****Erstes Kapitel.****Allgemeines.**

§ 77. Annahmen. Gleichgewicht der Wärme. Fall, dass die Temperatur eine lineare Function der Coordinaten ist	302
§ 78. Veränderlicher Wärmezustand. Der Wärmefluss. Partielle Differentialgleichung für die Temperatur u im Innern. Nebenbedingungen. Temperatur an der Oberfläche	304
§ 79. Die aufgestellten Bedingungen bestimmen die Temperatur u völlig. Der Beweis hierfür wird modificirt, wenn man dem Körper unendliche Dimensionen giebt	307
§ 80. Zerlegung der allgemeinen Aufgabe in einfachere	311

Zweites Kapitel.**Der Cylinder.**

§ 81. Die Temperatur u wird gefunden, wenn die Oberfläche des Cylinders in einer gegebenen Temperatur erhalten wird	314
§ 82. Ferner, wenn die Oberfläche mit einem Gas von gegebener Temperatur in Berührung ist. Von den beiden Temperaturen v und w , aus denen sich die gesuchte zusammensetzt, wird die erste gefunden, welche von der Zeit unabhängig ist	317
§ 83. Darauf die zweite	319

Drittes Kapitel.**Die Kugel.**

	Seite
§ 84. Aufstellung der Gleichungen, welche die Temperatur u der Kugel bestimmen; diese wird in v und w zerlegt. Man findet v	321
§ 85. Ferner w	322
§ 86. Der Ausdruck der Temperatur in jedem Punkte als Function der rechtwinkligen Coordinaten des Punktes	325

Viertes Kapitel.**Ueber das Rotationsellipsoid.**

§ 87. Aufstellung der Gleichungen, welche die Wärmebewegung in einem Rotationsellipsoide bestimmen, dessen Oberfläche in einer gegebenen Temperatur erhalten wird; v ist bereits bekannt, und w wird durch Cylinderfunctionen dritter Ordnung gefunden. Die Differentialgleichung dieser Functionen wird transformirt	328
---	-----

IV. Theil.**Zur Hydrodynamik.**

§ 88. Es handelt sich um den Widerstand den ein Körper, welcher in einer unendlichen Flüssigkeit fortbewegt wird, von dieser erleidet	332
§ 89. Analytischer Ausdruck der Bedingungen	332
§ 90. Lösung der Aufgabe, unter vereinfachenden Annahmen, für eine Kugel	333
§ 91. Für ein Ellipsoid	337
§ 92. Man findet die Seitengeschwindigkeiten u, v, w und den Druck p .	341

Zusätze zum ersten Bande 342—377

Zu S. 1—2 und S. 188. — Zu S. 37 und 38. — Zu S. 40. — Zu S. 50. — Zu S. 57—64. — Zur 2. Anmerkung auf S. 67. — Zu S. 85. — Zu S. 97—125. — Zu S. 155 und 201. — Zu S. 183. — Zu S. 221. — Zu S. 248. — Zu S. 258—259. — Zum 4. Kapitel des I. Theiles. — Zu S. 311—313, § 73. — Zu S. 381, § 99. — Zu S. 437. — Zu S. 463, § 129. —

Druckfehler im zweiten Bande.

S. 32 Zeile 10 v. o. statt über l. m. unter. — S. 185 Gleichung (22) statt f_l l. m. f_v . — S. 219 Zeile 5 v. o. statt $\mathfrak{R}''(0)$ l. m. $\mathfrak{R}''(1)$. — S. 224 Formel (25) in der Summe nach ν füge man den Faktor $\cos \nu \pi$ hinzu, streiche ihn auf Seite 241 Formel (29), und auf S. 244 in den Ausdrücken für G_l und G_α . — S. 240 Z. 7 v. u. statt wenn man setzt l. m. wenn man $(1-x)^{\frac{1}{2}}$, wegen S. 224, das Zeichen von x giebt und setzt. — S. 251 am Schluss der letzten Gleichung im Zusatze statt $\cos nx$ l. m. $\sin nx$. — S. 336 in dem Ausdruck für h auf Zeile 13 v. o. statt $3xc^3$ l. m. $3c^3$. —