

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
PREFACE de D. LACOMBE	V
AVERTISSEMENT.....	XI
LISTE DES SYMBOLES UTILISES.....	XVII
NOTATIONS	XIX

1^{ère} PARTIE

CHAPITRE I : FONCTIONS MECANIQUEMENT CALCULABLES.....	1
I.1 – Définitions des fonctions récursives et thèse de A. Church.....	1
I.1.1 – Définition des fonctions récursives à l'aide des machines à programme	1
I.1.2 – Définition arithmétique des fonctions récursives et thèse de Church	6
I.1.3 – Exemples d'utilisation de la thèse de Church	11
a) Numérotation des programmes	11
b) Principe du fonctionnement des ordinateurs : élément universel standard.....	11
I.2 – Propriétés élémentaires des ensembles récursifs et récursivement énumérables	14
I.3 – Définition arithmétique des ensembles récursivement énumérables	23
I.4 – Démonstration de l'inclusion $*F_{\mathfrak{z}} \subset *F_R$	30
Annexe au chapitre I. Bijection entre \mathbb{N} et $*F_f^{(p)}$	36
CHAPITRE II : PROPRIETES DES ELEMENTS UNIVERSELS	39
II.1 – Second théorème de récursion de Kleene et applications.....	39
II.2 – Isomorphie des éléments universels.....	46
II.3 – Suitages autogènes.....	49
II.3.1 – Définitions-généralités	49
II.3.2. – Suitages élastiques.....	54

	Pages
CHAPITRE III : FONCTIONNELLES RECURSIVES	59
III.1 – Topologie de l’inclusion sur l’ensemble des parties d’un ensemble	60
III.2 – Fonctionnelles récursives	67
III.2.1 – Définitions-généralités	67
III.2.2 – Fonctionnelles récursives totales. Incomparables	75
III.3 – Opérations effectives	83
CHAPITRE IV – COMPLEXITE	91
IV.1 – Généralités – Exemples	91
IV.2 – Propriétés des ensembles R_f^ψ	93
IV.2.1 – Enumérabilité récursive des ensembles R_f^ψ	93
IV.2.2 – Egalité des ensembles R_f^ψ : Phénomène du trou	96
IV.3 – Speed-up	100

2^{ème} PARTIE

CHAPITRE V : GENERALITES SUR LES LANGAGES DU PREMIER ORDRE	109
V.1 – Langages du premier ordre	109
V.1.1 – Définitions	109
V.1.2 – Numérotations effectives	112
V.2 – Réalisations d’un langage du premier ordre	112
V.3 – Conventions d’écriture	114
V.4 – Le langage de l’arithmétique	115
V.4.1 – Formules Δ_0^+ , Δ_0 , Σ^+ , Σ	115
V.4.2 – Propriétés des prédicats $P_{\Delta_0^+}$, P_{Δ_0} , P_{Σ^+} , P_Σ , P_A	117
V.5 – Le problème de la décision pour les formules vraies dans \mathbb{N}	119
V.5.1 – Solution négative pour le langage complet	119
V.5.2 – Le théorème de Presburger	121
V.6 – Traductions	124
V.6.1 – Généralités	125
V.6.2 – Exemples	129
a) Indécidabilité de l’ensemble des formules qui sont écrites avec l’addition et la multiplication et qui sont vraies dans \mathbb{N} (resp. dans \mathbb{Z})	129
b) Indécidabilité de l’ensemble des formules qui sont écrites avec l’addition et la relation de divisibilité et qui sont vraies dans \mathbb{N} (resp. dans \mathbb{Z})	129

	Pages
CHAPITRE VI : THEORIES DU PREMIER ORDRE.....	133
VI.1 – Théorème de complétude pour les langages sans égalité ni symbole fonctionnel	134
VI.2 – Les langages quelconques du premier ordre.....	143
VI.2.1 – Le théorème de complétude	144
VI.2.2 – Application à un problème d'effectivité.....	144
VI.2.3 – Théorèmes de Löwenheim-Skolem	145
VI.3 – Théories du premier ordre	146
VI.3.1 – Définitions.....	146
VI.3.2 – Théories axiomatisables.....	147
VI.3.3 – Exemples de théories décidables (ordres denses, corps algébriquement clos, corps ordonnés maximaux, etc.).....	151
VI.4 – Existence de théories de degré arbitraire	159
CHAPITRE VII : THEORIES INDECIDABLES	161
VII.1 – Représentation des relations en arithmétique.....	161
VII.2 – Indécidabilité en arithmétique : le théorème de Gödel-Church	166
VII.3 – Les “théorèmes de transfert”	170
VII.3.1 – Le théorème de A. Tarski	170
VII.3.2 – Le théorème de transfert pour les théories de Trahtenbrot	171
VII.3.3 – Suppression des symboles de constantes d'un langage	173
VII.4 – Exemples de théories indécidables	174
VII.4.1 – Indécidabilité du calcul des prédicats	175
VII.4.2 – Indécidabilité de la théorie des groupes	181
VII.4.3 – Indécidabilité de la théorie des anneaux et de la théorie des anneaux finis.....	182
VII.4.4 – Indécidabilité de la théorie des corps	186
Exercices.....	189
Bibliographie.....	213
Index	216