

Bezeichnungen
Technik der Darstellung
1 Einleitung
2 Zusammenstellung der durch Fluchtliniennomogramme darstellbaren Funktionen einer komplexen Veränderlichen
2.1 Elementare Funktionen
2.2 Das elliptische Integral erster Gattung und die Logarithmen der elliptischen Funktionen von Jacobi und Weierstraß
2.3 Logarithmische Ableitungen elliptischer Funktionen und Integrale Jacobischer elliptischer Funktionen
2.4 Weitere nomographierbare Funktionen
3 Zusammenstellung wichtiger Beziehungen und Eigenschaften elliptischer Integrale und Funktionen
3.1 Die elliptischen Integrale
3.1.1 Definition
3.1.2 Vollständige elliptische Integrale
3.1.3 Ausartungsfälle
3.2 Die Jacobischen elliptischen Funktionen
3.2.1 Definition
3.2.2 Die Perioden, Pole und Nullstellen der Jacobischen elliptischen Funktionen
3.2.3 Funktionswerte der Jacobischen elliptischen Funktionen sowie von $w = am z$ für einige wichtige Argumentwerte
3.2.4 Ausartungsfälle
3.2.5 Transformationsformeln
3.2.6 Wichtige Funktionalgleichungen und Additionstheoreme
3.2.7 Ableitungen und unbestimmte Integrale
3.2.8 Berechnung der Jacobischen elliptischen Funktionen mit Hilfe von Jacobischen Thetafunktionen und Potenzreihen
3.3 Die Weierstraßsche \wp -Funktion
3.3.1 Definition
3.3.2 Die Perioden und die Pole der Weierstraßschen \wp -Funktion
3.3.3 Die Invarianten und die Diskriminante
3.3.4 Ausartungsfälle
3.3.5 Differentialgleichung und Reihenentwicklung der \wp -Funktion
3.3.6 Wichtige Funktionalgleichungen und Additionstheorem
3.3.7 Zusammenhang der \wp -Funktion mit den Jacobischen elliptischen Funktionen

Symbols	V
Technique of Representation	V
1 Introduction	1
2 Summary of the Functions of a Complex Argument Representable by Alignment Nomograms	6
2.1 Elementary Functions	8
2.2 The Elliptic Integral of the First Kind and the Logarithms of the Elliptic Functions of Jacobi and Weierstrass	9
2.3 Logarithmic Derivatives of Elliptic Functions and Integrals of Jacobi's Elliptic Functions	10
2.4 Other Nomographicable Functions	11
3 Summary of Important Relations and Properties of Elliptic Integrals and Functions	12
3.1 The Elliptic Integrals	12
3.1.1 Definition	12
3.1.2 Complete Elliptic Integrals	16
3.1.3 Cases of Degeneration	16
3.2 The Jacobi's Elliptic Functions	16
3.2.1 Definition	16
3.2.2 The Periods, Poles and Zeros of the Jacobi's Elliptic Functions	17
3.2.3 Function-Values of Jacobi's Elliptic Functions as well as of $w = \operatorname{am} z$ for Some Important Argument Values	19
3.2.4 Cases of Degeneration	20
3.2.5 Formulas of Transformation	21
3.2.6 Important Functional Equations and Addition Theorems	21
3.2.7 Derivatives and Indefinite Integrals	22
3.2.8 Computation of the Jacobi's Elliptic Functions by Means of Jacobi's Theta Functions and Power Series	23
3.3 The Weierstrass' \wp -Function	25
3.3.1 Definition	25
3.3.2 The Periods and the Poles of the Weierstrass' \wp -Function	26
3.3.3 The Invariants and the Discriminant	26
3.3.4 Cases of Degeneration	27
3.3.5 Differential Equation and Serial Development of the \wp -Function	28
3.3.6 Important Functional Equations and the Addition Theorem	28
3.3.7 Connection of the \wp -Function with the Jacobi's Elliptic Functions	30

4 Aufbau und Benutzung der Nomogramme

4.1 Allgemeines

4.2 Nomogramme zur Ablesung elementarer Funktionen

4.2.1 Nomogramme für die Funktionen $w = \ln z$ und $z = e^w$

4.2.1.1 Beschriftung der Skalen

4.2.1.2 Beschreibung der Ablesungen

4.2.1.3 Besondere Ablesungen

4.2.1.4 Ablesebeispiele

4.2.2 Nomogramme für die Funktionen $w = \sin z$, $w = \cos z$, $w = \sinh z$, $w = \cosh z$, $z = \arcsin w$, $z = \arccos w$, $z = \operatorname{arsinh} w$, $z = \operatorname{arcosh} w$

4.2.2.1 Skalenträger

4.2.2.2 Beschriftung der Skalen

4.2.2.3 Beschreibung der Ablesungen von $w = \sin z$, $w = \cos z$, $z = \arcsin w$, $z = \arccos w$

4.2.2.4 Beschreibung der Ablesungen von $w = \sinh z$, $w = \cosh z$, $z = \operatorname{arsinh} w$, $z = \operatorname{arcosh} w$

4.2.2.5 Ablesebeispiele

4.3 Nomogramme zur Ablesung des elliptischen Integrals erster Gattung, seiner Umkehrfunktion und der Logarithmen der Jacobischen elliptischen Funktionen

4.3.1 Fluchtliniennomogramme für das elliptische Integral erster Gattung und seine Umkehrfunktion für reelles k^2

4.3.1.1 Modulbereiche

4.3.1.2 Skalenträger

4.3.1.3 Besondere Ablese- und Einstellmöglichkeit für u und für v

4.3.1.4 Beschriftung der Skalen

4.3.1.5 Beschreibung der Ablesungen $w = \operatorname{am}(z, k)$

4.3.1.6 Beschreibung der Ablesungen $z = F(w, k)$

4.3.1.7 Bemerkungen zu den Ablesemöglichkeiten in Tafel 17

4.3.1.8 Ausartungsfall zu den Tafeln 4 bis 17

4.3.1.9 Ablesebeispiele

4.3.2 Nomogramme mit besonderer Ablesevorschrift für das elliptische Integral erster Gattung und seine Umkehrfunktion für reelles k^2

4.3.2.1 Modulbereich und Skalenträger

4.3.2.2 Beschriftung der Skalen und Ablesevorschrift

4.3.2.3 Beschreibung der Ablesungen

4.3.3 Fluchtliniennomogramme für das elliptische Integral erster Gattung und seine Umkehrfunktion für komplexes k^2

4.3.3.1 Modulbereich

4.3.3.2 Skalenträger

4.3.3.3 Beschriftung der Skalen

4.3.3.4 Beschreibung der Ablesungen $w = \operatorname{am}(\beta z, k) = \operatorname{am}(\hat{z}, k)$

4.3.3.5 Beschreibung der Ablesungen $z = (1/\beta) F(w, k)$

4.3.3.6 Ablesebeispiel

4	Structure and Use of the Nomograms	31
4.1	General Remarks	31
4.2	Nomograms for Reading of Elementary Functions	32
4.2.1	Nomograms of the Functions $w = \ln z$ and $z = e^w$	32
4.2.1.1	Inscription of the Scales	32
4.2.1.2	Characterization of the Readings	33
4.2.1.3	Special Readings	34
4.2.1.4	Examples of Reading	34
4.2.2	Nomograms of the Functions $w = \sin z$, $w = \cos z$, $w = \sinh z$, $w = \cosh z$, $z = \arcsin w$, $z = \arccos w$, $z = \operatorname{arsinh} w$, $z = \operatorname{arcosh} w$	37
4.2.2.1	Base of Scales	37
4.2.2.2	Inscription of the Scales	37
4.2.2.3	Characterization of the Readings of $w = \sin z$, $w = \cos z$, $z = \arcsin w$, $z = \arccos w$	38
4.2.2.4	Characterization of the Readings of $w = \sinh z$, $w = \cosh z$, $z = \operatorname{arsinh} w$, $z = \operatorname{arcosh} w$	39
4.2.2.5	Examples of Reading	39
4.3	Nomograms for Reading of the Elliptic Integral of the First Kind, of its Inverse Func- tion and of the Logarithms of Jacobi's Elliptic Functions	41
4.3.1	Alignment Nomograms of the Elliptic Integral of the First Kind and of its Inverse Function for a Real k^2	41
4.3.1.1	Ranges of Module	41
4.3.1.2	Base of Scales	42
4.3.1.3	Special Possibility of Reading and Adjustment for u and for v	42
4.3.1.4	Inscription of the Scales	43
4.3.1.5	Characterization of the Readings $w = \operatorname{am}(z, k)$	44
4.3.1.6	Characterization of the Readings $z = F(w, k)$	45
4.3.1.7	Remarks to the Possibilities of Reading in Chart 17	47
4.3.1.8	Case of Degeneration Concerning the Charts 4 to 17	48
4.3.1.9	Examples of Reading	49
4.3.2	Nomograms with a Special Reading Instruction for the Elliptic Integral of the First Kind and its Inverse Function for a Real k^2	52
4.3.2.1	Range of Module and Base of Scales	52
4.3.2.2	Inscription of the Scales and Reading Instruction	53
4.3.2.3	Characterization of the Readings	53
4.3.3	Alignment Nomograms of the Elliptic Integral of the First Kind and of its Inverse Function for a Complex k^2	53
4.3.3.1	Range of Module	54
4.3.3.2	Base of Scales	54
4.3.3.3	Inscription of the Scales	54
4.3.3.4	Characterization of the Readings $w = \operatorname{am}(\beta z, k) = \operatorname{am}(\hat{z}, k)$	55
4.3.3.5	Characterization of the Readings $z = (1/\beta) F(w, k)$	56
4.3.3.6	Example of Reading	57

4.3.4	Die Logarithmen der Jacobischen elliptischen Funktionen $\operatorname{sn} z$ und $\operatorname{dn} z$
4.3.4.1	Modulbereiche
4.3.4.2	Skalenträger
4.3.4.3	Beschriftung der Skalen
4.3.4.4	Beschreibung der Ablesungen $w = \ln \operatorname{sn}(z, k_s)$
4.3.4.5	Beschreibung der Ablesungen $w = \ln \operatorname{dn}(z, k_d)$
4.3.4.6	Ausartungsfall zu Tafel 20
4.3.4.7	Ablesebeispiele
4.3.5	Der Logarithmus der Jacobischen elliptischen Funktion $\operatorname{cn} z$
4.3.5.1	Modulbereiche
4.3.5.2	Skalenträger
4.3.5.3	Beschriftung der Skalen
4.3.5.4	Beschreibung der Ablesungen $w = \ln \operatorname{cn}(z, k)$
4.3.5.5	Ablesebeispiel
4.4	Nomogramme zur Ableseung der Funktion $w = \ln(\wp(z; g_2, g_3) - e_2)$
4.4.1	Reduzierung der ∞^2 Kegelschnitte als Träger der Skalen für x und für y auf die ∞^1 Kegelschnitte eines Büschels
4.4.2	Bestimmung von Größen g_2, g_3 bzw. e_r und k_{\wp}^2 zu gegebenen Größen g_2^*, g_3^* bzw. e_r^*
4.4.3	Vorarbeiten zur Bestimmung eines Funktionswertes $w = \ln(\wp(z^*; e_1^*, e_2^*, e_3^*) - e_2^*)$ mit Hilfe eines Nomogramms für $w = \ln(\wp(z; e_1, e_2, e_3) - e_2)$
4.4.4	Beschreibung der Tafeln 25 bis 27
4.4.4.1	Modulbereiche und Skalenträger.
4.4.4.2	Beschriftung der Skalen in Tafel 25
4.4.4.3	Beschreibung der Ablesungen in Tafel 25
4.4.4.4	Beschriftung der Skalen in Tafel 26
4.4.4.5	Beschreibung der Ablesungen in Tafel 26
4.4.4.6	Beschriftung der Skalen in Tafel 27
4.4.4.7	Beschreibung der Ablesungen in Tafel 27
4.4.4.8	Ausartungsfall zu Tafel 27
4.4.4.9	Hilfstafel zur \wp -Funktion, Tafel 28
4.4.4.10	Ablesebeispiele zu $w = \ln(\wp(z; e_1, e_2, e_3) - e_2)$
4.5	Ableseung der Funktionswerte von logarithmischen Ableitungen elliptischer Funktionen und von Integralen Jacobischer elliptischer Funktionen
4.5.1	Beschreibung der Ablesungen
4.5.2	Tabellen von Modul- und Argumenttransformationen
4.6	Ableseung der Funktionswerte von Tschebyscheffschen Polynomen

4.3.4	The Logarithms of the Jacobi's Elliptic Functions $\operatorname{sn} z$ and $\operatorname{dn} z$	58
4.3.4.1	Ranges of Module	58
4.3.4.2	Base of Scales	58
4.3.4.3	Inscription of the Scales	59
4.3.4.4	Characterization of the Readings $w = \ln \operatorname{sn}(z, k_g)$	60
4.3.4.5	Characterization of the Readings $w = \ln \operatorname{dn}(z, k_d)$	61
4.3.4.6	Case of Degeneration Concerning Chart 20	62
4.3.4.7	Examples of Reading	62
4.3.5	The Logarithm of the Jacobi's Elliptic Function $\operatorname{cn} z$	64
4.3.5.1	Ranges of Module	64
4.3.5.2	Base of Scales	64
4.3.5.3	Inscription of the Scales	64
4.3.5.4	Characterization of the Readings $w = \ln \operatorname{cn}(z, k)$	65
4.3.5.5	Example of Reading	66
4.4	Nomograms for Reading of the Function $w = \ln(\wp(z; g_2, g_3) - e_2)$	67
4.4.1	Reduction of the ∞^2 Conics as the Bases of Scales for x and y to the ∞^1 Conics of a Pencil	67
4.4.2	Determination of Values g_2, g_3 resp. e_r and k_ω^2 with Regard to Given Values g_2^*, g_3^* resp. e_r^*	68
4.4.3	Preliminary Operations for the Determination of a Function-Value $w = \ln(\wp(z^*; e_1^*, e_2^*, e_3^*) - e_2^*)$ by Means of Nomograms for $w = \ln(\wp(z; e_1, e_2, e_3) - e_2)$	70
4.4.4	Characterization of the Charts 25 to 27	72
4.4.4.1	Ranges of Module and Base of Scales	72
4.4.4.2	Inscription of the Scales in Chart 25	72
4.4.4.3	Characterization of the Readings in Chart 25	73
4.4.4.4	Inscription of the Scales in Chart 26	74
4.4.4.5	Characterization of the Readings in Chart 26	74
4.4.4.6	Inscription of the Scales in Chart 27	75
4.4.4.7	Characterization of the Readings in Chart 27	75
4.4.4.8	Case of Degeneration Concerning Chart 27	76
4.4.4.9	Auxiliary Chart for the \wp -Function, Chart 28	77
4.4.4.10	Examples of Reading $w = \ln(\wp(z; e_1, e_2, e_3) - e_2)$	79
4.5	Reading of the Function-Values of Logarithmic Derivatives of Elliptic Functions and of Integrals of Jacobi's Elliptic Functions	82
4.5.1	Characterization of Readings	82
4.5.2	Tables of Module and Argument Transformations	83
4.6	Reading of the Function-Values of Tchebycheff's Polynomials	84

5 Auswahl des besten Nomogramms für vorgegebene Ablesungsaufgaben	
5.1 Allgemeine Gesichtspunkte für die Auswahl der Nomogramme	
5.2 Die Ablesebereiche eines Nomogramms	
5.3 Auswahl des Nomogramms bei zusammengesetzten Ablesungen	
6 Ermittlung der Funktionswerte elliptischer Funktionen in der Umgebung der Ränder des Periodenrechtecks durch Näherungsausdrücke	
6.1 Näherungsausdrücke für die Funktionen $w = \operatorname{sn}(z, k)$, $w = \operatorname{cn}(z, k)$, $w = \operatorname{dn}(z, k)$, $w = \operatorname{am}(z, k)$	
6.2 Näherungsausdrücke für die Funktion $w = \wp(z)$	
7 Zahlentabellen	
7.1 Koeffiziententabellen zu den Näherungsausdrücken für die Funktionen $w = \operatorname{sn}(z, k)$, $w = \operatorname{cn}(z, k)$, $w = \operatorname{dn}(z, k)$, $w = \operatorname{am}(z, k)$ gemäß Abschnitt 6.1	
7.2 Tabellen zur \wp -Funktion	
7.2.1 Wertetabellen zur Berechnung der Koeffizienten der Näherungsausdrücke für die \wp -Funktion gemäß Abschnitt 6.2 und zu Tafel 25	
7.2.2 Ergänzungstabelle zu Tafel 28 zur Bestimmung von k_\wp^2	
7.3 Vollständige elliptische Integrale erster Gattung	
7.4 Tabelle zu Tafel 19	
8 Zuordnungs- und Transformationstabellen	
8.1 Elementare Funktionen	
8.1.1 Zuordnungstabellen zu den Nomogrammen der Funktionen $w = \ln z$ und $z = e^w$	
8.1.2 Transformationstabellen für $w = \ln z$ und $z = e^w$	
8.1.3 Zuordnungstabellen zu den Nomogrammen der Funktionen $w = \sin z$, $w = \cos z$ und $z = \arcsin w$, $z = \arccos w$	
8.2 Das elliptische Integral erster Gattung $z = F(w, k)$ und seine Umkehrfunktion $w = \operatorname{am}(z, k)$	
8.2.1 Transformationstabelle für die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung	
8.2.2 Zuordnungstabellen zu den Nomogrammen für die Funktionen $w = \operatorname{am}(z, k)$ und $z = F(w, k)$	
8.3 Zuordnungstabellen zu den Nomogrammen für die natürlichen Logarithmen Jacobischer elliptischer Funktionen	
8.4 Zuordnungstabellen zu den Nomogrammen für $w = \ln(\wp(z) - e_2)$	

5 Selection of the Best Nomogram for Given Reading Problems	85
5.1 General Aspects with Regard to the Selection of the Nomograms	85
5.2 Reading Ranges of a Nomogram	85
5.3 Nomogram Selection for Composite Readings	86
6 Determination of the Function-Values of Elliptic Functions in the Surroundings of the Period Rectangle Boundaries by Means of Approximations	88
6.1 Approximations for the Functions $w = \operatorname{sn}(z, k)$, $w = \operatorname{cn}(z, k)$, $w = \operatorname{dn}(z, k)$, $w = \operatorname{am}(z, k)$	88
6.2 Approximations for the Function $w = \wp(z)$	88
7 Tabular Data	90
7.1 Tables of Coefficients for the Approximations of the Functions $w = \operatorname{sn}(z, k)$, $w = \operatorname{cn}(z, k)$, $w = \operatorname{dn}(z, k)$, $w = \operatorname{am}(z, k)$ According to Section 6.1	90
7.2 Tables for the \wp -Function	97
7.2.1 Tables of Values for the Computation of the Approximation Coefficients of the \wp -Function According to Section 6.2 and for Chart 25	97
7.2.2 Supplementary Table of Chart 28 for Determination of k_\wp^2	98
7.3 Complete Elliptic Integrals of the First Kind	99
7.4 Table for Chart 19	100
8 Correlation and Transformation Tables	101
8.1 Elementary Functions	101
8.1.1 Correlation Tables for the Nomograms of the Functions $w = \ln z$ and $z = e^w$	101
8.1.2 Transformation Tables for $w = \ln z$ and $z = e^w$	102
8.1.3 Correlation Tables for the Nomograms of the Functions $w = \sin z$, $w = \cos z$ and $z = \arcsin w$, $z = \arccos w$	103
8.2 The Elliptic Integral of the First Kind $z = F(w, k)$ and its Inverse Function $w = \operatorname{am}(z, k)$	104
8.2.1 Transformation Table for the Complete Elliptic Integrals of the First Kind	104
8.2.2 Correlation Tables for the Nomograms of the Functions $w = \operatorname{am}(z, k)$ and $z = F(w, k)$	105
8.3 Correlation Tables for the Nomograms of the Natural Logarithms of Jacobi's Elliptic Functions	106
8.4 Correlation Tables for the Nomograms of $w = \ln(\wp(z) - e_2)$	107

9 Nomogramme
9.1 Elementare Funktionen
9.1.1 Übersichtsblatt (grün)
9.1.2 Tafeln 1 bis 3
9.2 Das elliptische Integral erster Gattung $z = F(w, k)$ und seine Umkehrfunktion $w = \text{am}(z, k)$
9.2.1 Übersichtsblatt (rot)
9.2.2 Erläuterungen zu den Nomogrammauswahl- blättern
9.2.3 Nomogrammauswahlblätter für $w = \text{am}(z, k)$ (orange)
9.2.4 Nomogrammauswahlblätter für $z = F(w, k)$ (orange)
9.2.5 Tafeln 4 bis 19
9.3 Die Logarithmen der Jacobischen elliptischen Funk- tionen
9.3.1 Übersichtsblatt (blau)
9.3.2 Tafeln 20 bis 24
9.4 Die Funktion $w = \ln(\wp(z) - e_2)$
9.4.1 Übersichtsblatt (gelb)
9.4.2 Tafeln 25 bis 28

Literaturverzeichnis
-----------------------------	-------

9 Nomograms	109
9.1 Elementary Functions	111
9.1.1 Survey (Green)	111
9.1.2 Charts 1 to 3	113
9.2 The Elliptic Integral of the First Kind $z = F(w, k)$ and its Inverse Function $w = \text{am}(z, k)$	117
9.2.1 Survey (Red)	117
9.2.2 Comments on the Nomogram Selection Sheets	119
9.2.3 Nomogram Selection Sheets of $w = \text{am}(z, k)$ (Orange)	121
9.2.4 Nomogram Selection Sheets of $z = F(w, k)$ (Orange)	126
9.2.5 Charts 4 to 19	131
9.3 The Logarithms of the Jacobi's Elliptic Func- tions	147
9.3.1 Survey (Blue).	147
9.3.2 Charts 20 to 24	149
9.4 The Function $w = \ln(\wp(z) - e_2)$	155
9.4.1 Survey (Yellow).	155
9.4.2 Charts 25 to 28	157
References	161