

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel I. Differentiation

Der Satz von LEBESGUE über die Ableitung einer monotonen Funktion	1
1. Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion. – 2. Der Satz von LEBESGUE über die Ableitung einer monotonen Funktion. Mengen vom Maß Null. – 3. Beweis des Satzes von LEBESGUE. – 4. Funktionen von endlicher Variation.	
Einige unmittelbare Folgerungen aus dem Satz von LEBESGUE	9
5. Der Satz von FUBINI über die Differentiation von Reihen mit monotonen Gliedern. – 6. Verdichtungspunkte linearer Punktfolgen. – 7. Sprungfunktionen. – 8. Beliebige Funktionen von endlicher Variation. – 9. Satz von DENJOY-YOUNG-SAKS über die Ableitungszahlen allgemeiner Funktionen.	
Intervallfunktionen	16
10. Vorbemerkungen. – 11. Erster Fundamentalsatz. – 12. Zweiter Fundamentalsatz. – 13. DARBOUXsche und RIEMANNSche Integrale. – 14. Der Satz von DARBOUX. – 15. Funktionen von endlicher Variation. Rektifizierbare Kurven.	

Kapitel II. Das Lebesguesche Integral

Definition und Haupteigenschaften	25
16. Integrale von Treppenfunktionen. Zwei Hilfssätze. – 17. Das Integral summierbarer Funktionen. – 18. Gliedweise Integration einer wachsenden Folge (Satz von BEPPO LEVI). – 19. Gliedweise Integration einer Folge mit summierbarer Majorante (Satz von LEBESGUE). – 20. Sätze über die Integrierbarkeit einer Grenzfunktion. – 21. Die SCHWARZsche, die HÖLDERSche und die MINKOWSKISCHE Ungleichung. – 22. Meßbare Mengen und meßbare Funktionen.	
Unbestimmte Integrale. Absolut stetige Funktionen	42
23. Die Totalvariation und die Ableitung eines unbestimmten Integrals. – 24. Beispiel einer monotonen stetigen Funktion mit fast überall verschwindender Ableitung. – 25. Absolut stetige Funktionen. Kanonische Zerlegung monotoner Funktionen. – 26. Partielle Integration und Integration durch Substitution. – 27. Das Integral als Mengenfunktion.	
Der Raum L^1 und seine linearen Funktionale. Die Räume L^p	51
28. Der Raum L^1 . Konvergenz im Mittel. Satz von RIESZ-FISCHER. – 29. Schwache Konvergenz. – 30. Lineare Funktionale. – 31. Folgen linearer Funktionale. Ein Satz von OSGOOD. – 32. Die Separabilität von L^1 . Das Auswahltheorem. – 33. Orthonormierte Systeme. – 34. Unterräume von L^1 . Zerlegungssatz. – 35. Ein anderer Beweis des Auswahltheorems. Fortsetzung von Funktionalen. – 36. Der Raum L^p und seine linearen Funktionale. – 37. Ein Satz über die Konvergenz im Mittel. – 38. Ein Satz von BANACH-SAKS.	

Funktionen mehrerer Veränderlicher	73
39. Definitionen. Übertragungsprinzip. – 40. Sukzessive Integrationen. Satz von FUBINI. – 41. Ableitungen einer additiven nichtnegativen Rechtecksfunktion bezüglich eines Gitternetzes. Parallelverschiebung des Netzes. – 42. Rechtecksfunktionen von endlicher Variation. Konjugierte Netze. – 43. Additive Mengenfunktionen. (B)-meßbare Mengen.	
Andere Definitionen des LEBESGUESchen Integrals	83
44. (L)-meßbare Mengen. – 45. (L)-meßbare Funktionen und (L)-Integral. – 46. Andere Definitionen. Satz von EGOROFF. – 47. Elementarer Beweis der Sätze von ARZELÀ und OSGOOD. – 48. Die Integration als Umkehrung der Differentiation.	
<i>Kapitel III. Das Stieltjessche Integral und seine Verallgemeinerungen</i>	
Lineare Funktionale im Raum der stetigen Funktionen	97
49. Das STIELTJESSche Integral. – 50. Lineare Funktionale im Raum C . – 51. Die Eindeutigkeit der erzeugenden Funktion. – 52. Fortsetzung eines linearen Funktional. – 53. Approximationssatz. Momentenproblem. – 54. Partielle Integration. Zweiter Mittelwertsatz. – 55. Folgen von Funktionalen.	
Verallgemeinerungen des STIELTJES-Integrals	113
56. Die STIELTJES-RIEMANNschen und STIELTJES-LEBESGUESchen Integrale. – 57. Reduktion des STIELTJES-LEBESGUESchen Integrals auf ein LEBESGUESches Integral. – 58. Beziehungen zwischen zwei STIELTJES-LEBESGUESchen Integralen. – 59. Funktionen mehrerer Variabler. Direkte Definition. – 60. Definition mit Hilfe des Übertragungsprinzips.	
Das DANIELLSche Integral	122
61. Positive lineare Funktionale. – 62. Funktionale von veränderlichem Vorzeichen. – 63. Die Ableitung eines Funktional bezüglich eines anderen.	
<i>Kapitel IV. Integralgleichungen</i>	
Verfahren der sukzessiven Approximationen	131
64. Einführung. – 65. Beschränkte Kerne. – 66. Quadratisch summierbare Kerne. Lineare Transformationen des Raumes L^2 . – 67. Inverse Transformation. Reguläre und singuläre Werte. – 68. Iterierte Kerne, lösende Kerne. – 69. Approximation eines beliebigen Kernes durch ausgeartete Kerne.	
FREDHOLMSche Alternative	149
70. Integralgleichungen mit ausgearteten Kernen. – 71. Integralgleichungen mit Kernen vom allgemeinen Typ. – 72. Zerlegung an der Stelle eines singulären Wertes. – 73. Die FREDHOLMSche Alternative für allgemeine Kerne.	
Die FREDHOLMSchen Determinanten	159
74. Das FREDHOLMSche Verfahren. – 75. Die HADAMARDSche Ungleichung.	
Ein anderes auf der Vollstetigkeit beruhendes Verfahren	164
76. Vollstetigkeit. – 77. Die Unterräume \mathfrak{R}_n und \mathfrak{R}_n . – 78. Die Fälle $\nu = 0$ und $\nu \geq 1$; Zerlegungssatz. – 79. Verteilung der singulären Werte. – 80. Kanonische Zerlegung an der Stelle eines singulären Wertes.	
Anwendungen auf die Potentialtheorie	176
81. DIRICHLETSches und NEUMANNsches Problem; Lösung nach der Methode von FREDHOLM.	

Kapitel V. Hilbertsche und Banachsche Räume

Der HILBERTSche Raum 181
 82. Der HILBERTSche Folgenraum. – 83. Der abstrakte HILBERTSche Raum. –
 84. Lineare Transformationen des HILBERTSchen Raumes. Grundlegende Begriffe. –
 85. Lineare vollstetige Transformationen. – 86. Biorthogonale Folgen. Ein Satz von
 PALEY und WIENER.
 BANACHSche Räume 19
 87. BANACHSche Räume und ihre konjugierten Räume. – 88. Lineare Transformati-
 onen und ihre adjungierten Transformationen. – 89. Funktionalgleichungen. –
 90. Transformationen des Raumes der stetigen Funktionen. – 91. Weiteres zur
 Potentialtheorie.

Kapitel VI. Vollstetige symmetrische Transformationen des Hilbertschen Raumes

Existenz von Eigenelementen. Entwicklungssatz 214
 92. Eigenwerte und Eigenelemente. Einfachste Eigenschaften symmetrischer
 Transformationen. – 93. Vollstetige symmetrische Transformationen. – 94. Lösung
 der Funktionalgleichung $f - \lambda Af = g$. – 95. Direkte Bestimmung des n -ten Eigen-
 wertes von gegebenem Vorzeichen. – 96. Ein anderes Verfahren zur Konstruktion
 der Eigenwerte und Eigenelemente.
 Transformationen mit symmetrischem Kern 227
 97. Die Sätze von HILBERT und SCHMIDT. – 98. Der Satz von MERCER.
 Anwendungen auf das Problem der schwingenden Saite und auf fastperiodische Funk-
 tionen 236
 99. Das Problem der schwingenden Saite. Die Räume D und H . – 100. Problem der
 schwingenden Saite. Eigenschwingungen. – 101. Der Raum der fastperiodischen
 Funktionen. – 102. Beweis des Fundamentalsatzes über die fastperiodischen Funk-
 tionen. – 103. Isometrische Transformationen eines endlichdimensionalen Raumes.

Kapitel VII.

Beschränkte symmetrische, unitäre und normale Transformationen des Hilbertraumes

Symmetrische Transformationen 247
 104. Einige grundlegende Eigenschaften. – 105. Projektionen. – 106. Funktionen
 einer beschränkten symmetrischen Transformation. – 107. Spektralzerlegung einer
 beschränkten symmetrischen Transformation. – 108. Positiver und negativer Teil
 einer symmetrischen Transformation. Anderer Beweis für die Spektralzerlegung.
 Unitäre und normale Transformationen 265
 109. Unitäre Transformationen. – 110. Normale Transformationen. Faktorisierun-
 gen. – 111. Spektralzerlegung normaler Transformationen. Funktionen mehrerer
 Transformationen.
 Unitäre Transformationen des Raumes L^2 276
 112. Ein Satz von BOCHNER. – 113. Die Transformationen von FOURIER-PLAN-
 CHEREL und von WATSON.

Kapitel VIII.

Nichtbeschränkte lineare Transformationen des Hilbertschen Raumes

Verallgemeinerung des Begriffs der linearen Transformation	281
114. Ein Satz von HELLINGER und TOEPLITZ. Erweiterung des Begriffs der linearen Transformation. – 115. Adjungierte Transformationen. – 116. Vertauschbarkeit. Reduktion. – 117. Der Graph einer Transformation. – 118. Die Transformationen $B = (I + T^*T)^{-1}$ und $C = T(I + T^*T)^{-1}$.	
Selbstadjungierte Transformationen. Spektralzerlegung	293
119. Symmetrische und selbstadjungierte Transformationen. Definitionen und Beispiele. – 120. Spektralzerlegung einer selbstadjungierten Transformation. – 121. Methode von VON NEUMANN. CAYLEY-Transformierte. – 122. Halbbeschränkte selbstadjungierte Transformationen.	
Fortsetzung symmetrischer Transformationen	309
123. CAYLEY-Transformierte. Defektindizes. – 124. Halbbeschränkte symmetrische Transformationen. Methode von FRIEDRICHs. – 125. Methode von KREIN.	

Kapitel IX.

Selbstadjungierte Transformationen: Funktionalkalkül, Spektrum, Störungen

Funktionalkalkül	325
126. Beschränkte Funktionen. – 127. Nicht beschränkte Funktionen. Definitionen. – 128. Nicht beschränkte Funktionen. Rechenregeln. – 129. Charakteristische Eigenschaften der Funktionen einer selbstadjungierten Transformation. – 130. Endliche oder abzählbare Mengen vertauschbarer selbstadjungierter Transformationen. – 131. Beliebige Mengen vertauschbarer selbstadjungierter Transformationen.	
Das Spektrum einer selbstadjungierten Transformation und seine Störungen	344
132. Das Spektrum einer selbstadjungierten Transformation. Zerlegung in Punktspektrum und kontinuierliches Spektrum. – 133. Häufungspunkte des Spektrums. – 134. Störung des Spektrums durch Addition einer vollstetigen Transformation. – 135. Stetige Störungen. – 136. Analytische Störungen.	

Kapitel X.

Gruppen und Halbgruppen von Transformationen

Unitäre Transformationen	363
137. Der Satz von STONE. – 138. Ein weiterer Beweis, der auf dem Satz von BOCHNER beruht. – 139. Einige Anwendungen des Satzes von STONE. – 140. Unitäre Darstellungen allgemeinerer Gruppen.	
Nicht unitäre Transformationen	376
141. Gruppen und Halbgruppen selbstadjungierter Transformationen. – 142. Infinitesimale Transformation einer Halbgruppe von Transformationen allgemeinen Typs. – 143. Exponentialformeln.	
Ergodensätze	388
144. Die ersten Methoden. – 145. Methoden, die auf Konvexitätsbetrachtungen beruhen. – 146. Halbgruppen nicht vertauschbarer Kontraktionen.	

Kapitel XI. Spektraltheorie linearer Transformationen von allgemeinem Typ

Anwendungen funktionentheoretischer Methoden	397
147. Das Spektrum. Kurvenintegrale. – 148. Zerlegungssatz. – 149. Beziehungen zwischen dem Spektrum und den Normen der iterierten Transformationen. – 150. Anwendung auf absolut konvergente trigonometrische Reihen. – 151. Elemente eines Funktionalkalküls. – 152. Zwei Beispiele.	
Spektralmengen nach J. VON NEUMANN	417
153. Grundlegende Sätze. – 154. Spektralmengen. – 155. Charakterisierung der symmetrischen, unitären und normalen Transformationen durch ihre Spektralmengen.	

Anhang

Fortsetzung linearer Transformationen des HILBERTSchen Raumes mit Austritt aus dem Raum	427
§ 1. Einleitung. – § 2. Verallgemeinerte Spektralscharen. Satz von NEUMARK. – § 3. Momentfolgen von Transformationen. – § 4. Kontraktionen des HILBERTSchen Raums. – § 5. Normale Fortsetzungen. – § 6. Der Hauptsatz. – § 7. Beweis des NEUMARKSchen Satzes. – § 8. Beweis des Satzes über Momentfolgen. – § 9. Beweis der Sätze über Kontraktionen. – § 10. Beweis des Satzes über normale Fortsetzungen.	
Nachtrag	459
Literaturverzeichnis	463
Namen- und Sachverzeichnis	473