

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Les fondements du calcul fonctionnel.

CHAPITRE I.

Pages.

Les espaces fonctionnels.....

Notions générales. Espaces fonctionnels et distances. — Le passage du fini à l'infini et l'espace des fonctions de carrés sommables. — Espaces affines. Ecart et longueur. — Définitions de divers espaces fonctionnels. — Fonctionnelles et fonctions d'une infinité de variables.

CHAPITRE II.

Fonctionnelles linéaires et variations premières..... 17

Fonctionnelles linéaires. Définition et propriétés simples. Forme normale d'une fonctionnelle linéaire. — Cas de l'espace L_2 . La formule de M. Fréchet. — Cas de l'espace E_c . La formule de Fr. Riesz. — Cas des espaces L . Extensions de la formule de M. Fréchet. — Extensions de la formule de Fr. Riesz. — Définition de la variation d'une fonctionnelle. — Expressions de la variation. Dérivées fonctionnelles. — Fonctions de lignes et de surfaces.

CHAPITRE III.

Fonctionnelles entières du second degré et variations secondes..... 50

Fonctionnelles entières du second degré. Définition; extension de la formule de Fr. Riesz. — Types divers de fonctionnelles quadratiques; forme régulière et forme normale. — La variation seconde. — La variation de la dérivée fonctionnelle. — Cas des fonctions de lignes. — Fonctions d'une ligne plane et d'un point. — Fonctionnelles dépendant de deux fonctions ou d'une ligne et d'une fonction.

CHAPITRE IV.

Fonctionnelles de degrés quelconques..... 74

Variation d'ordre p et fonctionnelles entières et homogènes de degré p . — Fonctionnelles non homogènes. Le théorème fondamental de M. Fréchet. — Définition générale des fonctionnelles régulières. Un théorème de R. Gâteaux. — Extensions du théorème de Gâteaux.

DEUXIÈME PARTIE.

Les équations aux dérivées fonctionnelles du premier ordre.

CHAPITRE I.

	Pages.
<i>Les équations aux dérivées fonctionnelles généralisant les équations aux différentielles totales</i>	91

Définition des équations étudiées dans ce chapitre. — Réduction à une équation différentielle — Cas de fonctionnelles dépendant de paramètres arbitraires. — La condition d'intégrabilité. — Application aux fonctionnelles dépendant de paramètres arbitraires. — Exemples d'équations complètement intégrables. — Cas des fonctions d'une ligne et de deux points. — Note sur la condition d'intégrabilité.

CHAPITRE II.

<i>L'équation aux dérivées fonctionnelles de la fonction de Green</i>	111
---	-----

Le problème de Dirichlet et la fonction de Green dans le cas du plan :

L'équation de Laplace. — Les potentiels de simple et de double couche. — Le problème de Dirichlet. — La fonction de Green. — Cas du cercle. — Singularité de la fonction de Green. — Application de la représentation conforme. — Le problème de Dirichlet dans l'espace. — *La variation de la fonction de Green* : La formule de J. Hadamard. — La variation des dérivées de la fonction de Green. — *Intégrabilité de l'équation (25)* : Formation de la condition d'intégrabilité. — Étude du cas régulier. — Étude du cas singulier.

CHAPITRE III.

<i>Transformations et applications de l'équation aux dérivées fonctionnelles de la fonction de Green</i>	133
--	-----

L'équation de J. Hadamard : l'équation de J. Hadamard et la fonction de Green. — L'équation de J. Hadamard et la fonction de Green d'ordre deux. — L'équation de J. Hadamard et la fonction \mathcal{G} sur le contour. — Nouvelles solutions de l'équation de J. Hadamard. — *Applications* : Les inégalités de J. Hadamard. — La recherche des solutions homogènes. — Étude du cas du cercle. — Extension au cas de l'espace.

CHAPITRE IV.

<i>Les équations aux dérivées fonctionnelles partielles</i>	154
---	-----

Définition des équations aux dérivées fonctionnelles partielles. — La condition d'intégrabilité. — Définitions géométriques. — Le problème de Cauchy. — Calcul des éléments du second ordre. — Équations des caractéristiques. — Propriétés des caractéristiques. — Intégrabilité des équations des caractéristiques. — Solution du problème de Cauchy. — Intégrabilité des équations des caractéristiques. — La notion d'enveloppe. — La notion d'intégrale complète. — Les équations linéaires. — Cas des fonctionnelles dépendant d'un contour plan C et d'une fonction $u(s)$.

CHAPITRE V.

L'extension des équations de Jacobi-Hamilton..... 177

Notions générales. — Cas de l'intégrale de Dirichlet. — Généralisation. — L'équation aux dérivées fonctionnelles du minimum de l'aire d'une surface limitée à un contour donné.

CHAPITRE VI.

Types divers d'équations aux dérivées fonctionnelles partielles et de systèmes d'équations..... 190

Notions générales. — Équations linéaires. — Systèmes d'équations linéaires. — Équations non linéaires. — Systèmes d'équations non linéaires. — Équations contenant un paramètre. — Généralisation.

TROISIÈME PARTIE.

La notion de moyenne dans l'espace fonctionnel
et l'équation de Laplace généralisée.

CHAPITRE I.

La sphère dans l'espace à n dimensions..... 209

Remarques générales. — *Le volume et la surface de la sphère* : Calcul d'une intégrale définie. — Ordre de grandeur de I_n . — Le volume de la sphère dans l'espace E_n . — La concentration près de la surface. — La concentration près de l'équateur. — Volume commun à un nombre fini de zones. — La surface de la sphère. — *Un problème de calcul des variations* : Énoncé du problème. — Un problème de géométrie plane. — Un problème de géométrie sphérique. — Généralisation.

CHAPITRE II.

La notion de valeur moyenne dans l'espace L_2 223

Remarques générales. — La notion de valeur moyenne. — Énoncé d'un théorème général. — Démonstration du théorème énoncé dans le cas d'une fonctionnelle uniformément continue à l'intérieur d'une sphère. — Exemples de valeurs moyennes dans une sphère. — Les formules de Gâteaux pour la sphère. Relations entre les formules de Gâteaux et les théorèmes classiques du calcul des probabilités. — Remarque. — Extension du théorème du n° 15 à certaines fonctionnelles discontinues dans L_2 . — Application aux fonctionnelles du second degré. — La notion de courbure moyenne. — Surfaces minima. — Courbes. Plan osculateur moyen et courbure moyenne. — Exemples de valeurs moyennes dans des volumes autres que la sphère.

CHAPITRE III.

L'emploi d'une infinité dénombrable de coordonnées dans l'espace L_2 247

Définitions et remarques préliminaires. — La notion de suite également

dense. — Le cas des séries trigonométriques. — Exemple de suite non également dense. — Exemple de cas où l'ordre des termes influe sur la densité. — La notion de suite normalement dense. — Invariance du caractère normal par certaines permutations. — Le laplacien dans Ω et dans L_2 . — Remarque. — La notion de moyenne dans une sphère, dans Ω et dans L_2 .

CHAPITRE IV.

Mesure des volumes et des surfaces..... 268

Notions générales. Exemples simples. — Limite nécessaire de la précision des mesures. — Le volume du cylindre. — Le volume balayé par une surface variable. — La variation de l'aire d'une surface. — Propriétés des surfaces convexes. — Définition des fuseaux. — Variation de la section d'un fuseau. — Démonstration du théorème fondamental. — Extension aux volumes du théorème fondamental. — Classification des volumes dans l'espace Ω (ou dans L_2). — Comparaison des moyennes dans un volume et sur la surface qui le limite. — Remarques finales. Relations entre la théorie classique de la mesure et la théorie de la moyenne dans les espaces L_2 et Ω .

CHAPITRE V.

Les fonctionnelles harmoniques..... 299

Formules de dérivation des fonctionnelles composées. — Conséquences relatives à certaines équations aux dérivées fonctionnelles. — Remarques. Exemples de fonctionnelles harmoniques. — Formule fondamentale pour l'étude du problème de Cauchy. — Extension de la formule de Green. — Nouvelles formules relatives au laplacien. — Remarques. — La formule de Green et le potentiel. — Démonstration directe des formules (23) et (24). — Le problème de Dirichlet. — Le potentiel de double couche. — Cas des surfaces fermées convexes. — L'unicité de la solution du problème de Plateau. — Cas d'une surface ouverte ou d'une courbe. — Extension des résultats précédents. — Les variétés minima. — Notions préliminaires sur les surfaces convexes en moyenne. — Un lemme sur les surfaces minima. — Le problème de Dirichlet et le potentiel de double couche pour une surface convexe en moyenne. — Remarque. — Cas des surfaces quelconques. — Le potentiel de volume. — Le problème de Neumann.

QUATRIÈME PARTIE.

La théorie des fonctionnelles analytiques et ses applications.

Par M. FRANCO PELLEGRINO.

Introduction..... 357

CHAPITRE I.

Les champs de définition des fonctionnelles analytiques..... 361

Les fonctions localement analytiques et birégulières. — Voisinage restreint

et voisinage linéaire d'une fonction. — Nature topologique de l'espace $S^{(1)}$ des fonctions localement analytiques et birégulières. — Les ensembles de l'espace fonctionnel $S^{(1)}$. — Théorèmes sur les régions fonctionnelles linéaires. — Les régions fonctionnelles non linéaires. — Lignes analytiques dans l'espace $S^{(1)}$

CHAPITRE II.

Les fonctionnelles analytiques en général..... 375

Définition des fonctionnelles analytiques. — Continuité des fonctionnelles analytiques sur une ligne analytique et continuité en général.

CHAPITRE III.

Les fonctionnelles analytiques linéaires..... 382

Définition des fonctionnelles linéaires; exemples. — Fonctionnelles linéaires de la fonction $y = 0$ et d'une combinaison linéaire. — Dérivation sous le signe de fonctionnelle linéaire. — Intégration d'une fonctionnelle linéaire par rapport à un paramètre. — Fonctionnelles linéaires d'une série. — Continuité des fonctionnelles linéaires. — Quelques applications de la continuité des fonctionnelles linéaires. — Indicatrice antisymétrique d'une fonctionnelle linéaire. — Indicatrice symétrique d'une fonctionnelle linéaire. — La formule fondamentale des fonctionnelles linéaires. — Produits fonctionnels antisymétrique et symétrique. — Renforcement de la topologie des régions fonctionnelles. — Les fonctionnelles linéaires des fonctions uniformes sur une courbe algébrique. — Les fonctionnelles linéaires des fonctions de plusieurs variables. — Validité de la formule fondamentale. — Polydromie des fonctionnelles linéaires. — L'indicatrice projective. — Les fonctionnelles des fonctions d'une variable hyper-complexe.

CHAPITRE IV.

Les fonctionnelles mixtes..... 418

Opérateurs et fonctionnelles mixtes. — Opérateurs et fonctionnelles mixtes linéaires. — Théorème sur la distribution des singularités d'une fonction qui dépend linéairement d'une autre. — Opérateurs linéaires du cycle fermé. — Opérateurs normaux.

CHAPITRE V.

Quelques applications des fonctionnelles linéaires..... 427

Le calcul symbolique des opérateurs linéaires. — Calcul des fonctions de matrices. — Application à l'intégration des équations aux dérivées partielles. — Première méthode ou méthode des fonctions de I. — Seconde méthode ou méthode des opérateurs caractéristiques. — Troisième méthode, ou méthode générale, ou méthode des opérateurs intégrô-différentiels. — Quatrième méthode ou méthode des solutions fondamentales. — Cinquième méthode ou méthode des fonctions de matrices non permutables. — Expressions du noyau résolvant en terme finis.

CHAPITRE VI.

	Pages.
<i>Les fonctionnelles analytiques non linéaires</i>	454
<p>La série de Fantappiè. — Classification des fonctionnelles analytiques. — Les fonctionnelles analytiques homogènes. — Le théorème de Liouville pour les fonctionnelles analytiques et la série de Fantappiè. — Indicatrice locale des fonctionnelles non linéaires. — Maxima et minima des fonctionnelles analytiques réelles. — Sur quelques classes de fonctionnelles analytiques non linéaires. — Construction effective des produits fonctionnels invariants au point de vue relativiste.</p>	
BIBLIOGRAPHIE (de la quatrième partie).....	471
TABLES DES MATIÈRES.....	479