

# Inhalt

|        |                                                                             |    |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.     | Einführung .....                                                            | 9  |
| 1.1.   | Beispiel und historische Bemerkungen .....                                  | 9  |
| 1.2.   | Transformationen und Operatoren .....                                       | 10 |
| 1.3.   | Anwendungsmöglichkeiten .....                                               | 11 |
| 2.     | Laplace-Transformation .....                                                | 13 |
| 2.1.   | Definition der Laplace-Transformation .....                                 | 13 |
| 2.1.1. | Definition und Beispiele .....                                              | 13 |
| 2.1.2. | Zwei Klassen von Originalfunktionen $f(t)$ .....                            | 15 |
| 2.1.3. | Eindeutigkeit der Laplace-Transformation .....                              | 17 |
| 2.1.4. | Aufgaben: Bestimmung von Bildfunktionen .....                               | 17 |
| 2.2.   | Rechenregeln der Laplace-Transformation .....                               | 18 |
| 2.2.1. | Additionssatz .....                                                         | 18 |
| 2.2.2. | Lineare Substitutionen der Veränderlichen .....                             | 18 |
| 2.2.3. | Faltungssatz .....                                                          | 21 |
| 2.2.4. | Differentiationssatz .....                                                  | 22 |
| 2.2.5. | Weitere Rechenregeln .....                                                  | 24 |
| 2.2.6. | Transformation periodischer Funktionen .....                                | 25 |
| 2.2.7. | Übersicht über die Rechenregeln .....                                       | 26 |
| 2.2.8. | Aufgaben: Anwendung der Rechenregeln .....                                  | 27 |
| 2.3.   | Eigenschaften einer Laplace-Transformierten .....                           | 28 |
| 2.3.1. | Sätze für Laplace-Transformierte $F(p)$ .....                               | 28 |
| 2.3.2. | Aufgaben: Eigenschaften einer Laplace-Transformierten .....                 | 29 |
| 2.4.   | Umkehrung der Laplace-Transformation .....                                  | 29 |
| 2.4.1. | Rücktransformation rationaler Bildfunktionen .....                          | 30 |
| a)     | Partialbruchzerlegung rationaler Bildfunktionen $F(p)$ .....                | 30 |
| b)     | Rücktransformation von $F(p)$ im allgemeinen Fall .....                     | 31 |
| c)     | Rücktransformation bei einfachen Nullstellen des Nenners .....              | 32 |
| 2.4.2. | Rücktransformation mittels Rechenregeln und Tabelle 1 .....                 | 33 |
| 2.4.3. | Rücktransformation durch Reihenentwicklung .....                            | 34 |
| 2.4.4. | Die komplexe Umkehrformel .....                                             | 35 |
| 2.4.5. | Aufgaben: Bestimmung von Originalfunktionen .....                           | 38 |
| 2.5.   | Asymptotische Eigenschaften .....                                           | 39 |
| 2.5.1. | Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen .....                         | 39 |
| 2.5.2. | Asymptotische Eigenschaften der Laplace-Transformation .....                | 42 |
| 2.5.3. | Asymptotische Eigenschaften der Rücktransformation .....                    | 44 |
| 2.5.4. | Stabilität der Originalfunktionen .....                                     | 45 |
| 2.5.5. | Aufgaben: Anwendung asymptotischer Formeln .....                            | 46 |
| 3.     | Anwendungen der Laplace-Transformation .....                                | 47 |
| 3.1.   | Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten .....          | 47 |
| 3.1.1. | Anfangswertaufgaben .....                                                   | 48 |
| a)     | $f(t)$ besitzt eine rationale Bildfunktion .....                            | 48 |
| b)     | $f(t)$ ist für $t > 0$ stetig bis auf isoliert liegende Sprungstellen ..... | 53 |
| 3.1.2. | Spezielle Störfunktionen .....                                              | 58 |
| a)     | Sprungfunktion $f(t) = u(t)$ , Übergangsfunktion $g_u(t)$ .....             | 61 |
| b)     | Störfunktion $f(t) = e^{j\omega t}$ , Frequenzgang $Q(j\omega)$ .....       | 63 |

|        |                                                                                    |     |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| c)     | Diracsche Delta-Funktion $\delta(t)$ .....                                         | 65  |
| d)     | Impulsantwort $g_\delta(t)$ .....                                                  | 67  |
| e)     | Übersicht .....                                                                    | 68  |
| 3.1.3. | Aufgaben: Lösung linearer Differentialgleichungen .....                            | 70  |
| 3.2.   | Systeme linearer Differentialgleichungen .....                                     | 71  |
| 3.2.1. | Normale Systeme .....                                                              | 72  |
| a)     | Alle $f_i(t)$ besitzen rationale Bildfunktionen $F_i(p)$ .....                     | 72  |
| b)     | Die $f_i(t)$ sind für $t > 0$ stetig bis auf isoliert liegende Sprungstellen ..... | 74  |
| 3.2.2. | Entartete Systeme .....                                                            | 75  |
| 3.2.3. | Aufgaben: Lösung von Systemen .....                                                | 78  |
| 3.3.   | Partielle Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen .....                    | 79  |
| 3.3.1. | Beispiele zu den Grundtypen .....                                                  | 80  |
| 3.3.2. | Ein Beispiel aus der Physik .....                                                  | 82  |
| 3.4.   | Andere Anwendungen .....                                                           | 83  |
| 3.4.1. | Lineare Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten .....                     | 83  |
| 3.4.2. | Integralgleichungen vom Faltungstyp .....                                          | 84  |
| 3.4.3. | Übersicht der behandelbaren Gleichungstypen .....                                  | 86  |
| 3.4.4. | Aufgaben: Verschiedene Gleichungstypen .....                                       | 86  |
| 4.     | Moderne Operatorenrechnung .....                                                   | 87  |
| 4.1.   | Ringe und Körper .....                                                             | 87  |
| 4.1.1. | Ringe und Nullteiler .....                                                         | 87  |
| 4.1.2. | Körper und Division .....                                                          | 88  |
| 4.2.   | Mikusiński'scher Operatorenkörper $K$ .....                                        | 89  |
| 4.2.1. | Funktionsring $R$ .....                                                            | 90  |
| 4.2.2. | Operatorenkörper $K$ .....                                                         | 91  |
| 4.2.3. | Einfache Operatoren .....                                                          | 93  |
| 4.2.4. | Hauptformel der Operatorenrechnung .....                                           | 94  |
| 4.2.5. | Aufgaben: Rechnen im Ring $R$ und Körper $K$ .....                                 | 95  |
| 4.3.   | Spezielle Operatoren .....                                                         | 95  |
| 4.3.1. | In $p$ rationale Operatoren .....                                                  | 95  |
| 4.3.2. | Verschiebungsoperator .....                                                        | 96  |
| 4.3.3. | Distributionen und verallgemeinerte Laplace-Transformation .....                   | 98  |
| 4.3.4. | Weitere Operatoren .....                                                           | 99  |
| 4.4.   | Anwendungen und Aufgaben zur Operatorenrechnung .....                              | 100 |
| 5.     | Fourier-Transformation .....                                                       | 101 |
| 5.1.   | Definition der Fourier-Transformation .....                                        | 101 |
| 5.1.1. | Definition und Beispiele .....                                                     | 102 |
| 5.1.2. | Fourier-, Fourier-Kosinus- und Fourier-Sinus-Transformation .....                  | 103 |
| 5.1.3. | Fourier- und Laplace-Transformation .....                                          | 104 |
| 5.1.4. | Aufgaben: Bestimmung von Fourier-Transformierten .....                             | 105 |
| 5.2.   | Umkehrung der Fourier-Transformation .....                                         | 106 |
| 5.3.   | Rechenregeln der Fourier-Transformation .....                                      | 107 |
| 5.3.1. | Zusammenstellung der Rechenregeln .....                                            | 107 |
| 5.3.2. | Beispiele zur Anwendung der Rechenregeln .....                                     | 108 |
| 5.3.3. | Aufgaben: Anwendung der Rechenregeln .....                                         | 109 |
| 5.4.   | Anwendung der Fourier-Transformation .....                                         | 109 |
| 6.     | Z-Transformation .....                                                             | 111 |

|        |                                                  |     |
|--------|--------------------------------------------------|-----|
| 6.1.   | Diskrete Funktionen                              | 111 |
| 6.1.1. | Deutung diskreter Funktionen                     | 111 |
| 6.1.2. | Rechnen mit diskreten Funktionen                 | 112 |
| 6.1.3. | Eine Differenzgleichung                          | 113 |
| 6.2.   | Definition der $Z$ -Transformation               | 114 |
| 6.3.   | Wichtige Eigenschaften der $Z$ -Transformation   | 115 |
| 6.3.1. | Konvergenzgebiet der Bildfunktion $\tilde{F}(z)$ | 115 |
| 6.3.2. | Eindeutigkeit der $Z$ -Transformation            | 116 |
| 6.4.   | Rechenregeln der $Z$ -Transformation             | 116 |
| 6.4.1. | Zusammenstellung der Rechenregeln                | 117 |
| 6.4.2. | Beispiele zur Anwendung der Rechenregeln         | 118 |
| 6.4.3. | Aufgaben: Bestimmung von Bildfunktionen          | 120 |
| 6.5.   | Umkehrung der $Z$ -Transformation                | 120 |
| 6.5.1. | Möglichkeiten der Rücktransformation             | 120 |
| 6.5.2. | Aufgaben: Bestimmung von Originalfolgen          | 121 |
| 6.6.   | Lineare Differenzgleichungen                     | 122 |
| 6.6.1. | Lösungsprinzip für Differenzgleichungen          | 122 |
| 6.6.2. | Beispiele zur Lösung von Differenzgleichungen    | 123 |
| 6.7.   | Weitere Eigenschaften der $Z$ -Transformation    | 124 |
| 6.8.   | Verschiedene Anwendungen                         | 126 |
| 6.8.1. | Beispiele                                        | 126 |
| 6.8.2. | Aufgaben: Anwendung der $Z$ -Transformation      | 128 |
| 6.9.   | Zusammenhang mit der Laplace-Transformation      | 128 |
|        | Lösungen der Aufgaben                            | 130 |
|        | Tabelle 1: Laplace-Transformation                | 139 |
|        | Tabelle 2: Fourier-Transformation                | 146 |
|        | Tabelle 3: $Z$ -Transformation                   | 149 |
|        | Tabelle 4: Übersicht                             | 151 |
|        | Literatur                                        | 152 |
|        | Namen- und Sachregister                          | 153 |