INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel I. Der HILBERT-Raum 1

1. Lineare Systeme 1
2. Lineare Mannigfaltigkeiten 2
3. Das Skalarprodukt 3
4. Einige topologische Begriffe 6
5. Der HILBERT-Raum 7
6. Die Entfernung eines Punktes von einer konvexen Menge 10
7. Die Projektion eines Vektors auf einen Teilraum 12
8. Die Orthogonalisierung einer Vektorfolge 16
9. Die BESSELsche Ungleichung und die Abgeschlossenheitsrelation 18
10. Vollständige orthogonale Vektorsysteme in H 23
11. Der Raum L^2 28
12. Vollständige orthonormierte Systeme in L^2 31
13. Biorthogonale Vektorsysteme in H 34
14. Der Raum L^2_σ 36
15. Der Raum der fastperiodischen Funktionen 39
16. Der Begriff der Basis eines Raumes 40

Kapitel II. Lineare Funktionale und beschränkte lineare Operatoren 46

17. Punktfunktionen 46
18. Lineare Funktionale 48
19. Der Satz von F. RIESZ 50
20. Ein Kriterium für die Abgeschlossenheit in H eines vorgegebenen Systems von Vektoren 52
21. Ein Hilfssatz über konvexe Funktionale 53
22. Beschränkte lineare Operatoren 56
23. Bilineare Funktionale 58
24. Die allgemeine Form eines bilinearen Funktionals 60
25. Adjungierte Operatoren 61
26. Schwache Konvergenz in H 64
27. Kompaktheit 66
28. Ein Kriterium für die Beschränktheit eines Operators 70
29. Lineare Operatoren im separablen Raum 70
30. Der Begriff des vollstetigen Operators 76
31. Die HILBERT-SCHMIDTsche Norm 78
32. HILBERT-SCHMIDTsche Operatoren 82
33. Konvergente Folgen beschränkter linearer Operatoren 83
34. Mengen beschränkter linearer Operatoren im separablen HILBERT-Raum . . 85

Kapitel III. Projektoren und unitäre Operatoren 89

35. Definition eines Projektors 89
36. Die Eigenschaften der Projektoren 89
37. Operationen mit Projektoren 91
38. Folgen von Projektoren 94
39. Die Öffnung zweier linearer Mannigfaltigkeiten 95
40. Unitäre Operatoren 98
41. Isometrische Operatoren 99
42. Der FOURIER-PLANCHEREL-Operator 101

Kapitel IV. Einige allgemeine Begriffe und Sätze aus der Theorie der linearen Operatoren 105

43. Abgeschlossene Operatoren 105
44. Allgemeine Definition eines adjungierten Operators 106
45. Eigenvektoren, invariante Teilräume und Reduzibilität linearer Operatoren 108
46. Symmetrische Operatoren 112
47. Einige Sätze über isometrische und unitäre Operatoren 115
48. Der Begriff des Spektrums 116
49. Die Resolvente 119
50. Die Konjugation 121
51. Die Methode der Graphen 123
52. Eine Verallgemeinerung des Begriffs des Projektors 126
53. Matrixdarstellung unbeschränkter symmetrischer Operatoren 128
54. Der Operator der Multiplikation mit einer unabhängigen Veränderlichen . . 134
55. Der Differentiationsoperator 137

Kapitel V. Spektralanalysis vollstetiger Operatoren 145

56. Zwei Hilfssätze 145
57. Einige Aussagen über Eigenwerte vollstetiger Operatoren in R 146
58. Weitere Eigenschaften vollstetiger Operatoren 149
59. Die Methode von F. RIESZ in der Theorie der linearen Funktionalgleichungen 151
60. Der Satz von der Existenz eines Eigenvektors eines vollstetigen selbstadjungierten Operators 158
61. Das Spektrum vollstetiger selbstadjungierter Operatoren in R 160
62. Vollstetige normale Operatoren 163
63. Anwendungen auf die Theorie der fastperiodischen Funktionen 165
64. Die Entwicklung eines beliebigen vollstetigen Operators in eine Reihe nach eindimensionalen Operatoren 172
65. Der Satz von der Existenz eines invarianten Teilraumes eines beliebigen vollstetigen Operators in H 174
66. Nukleare Operatoren 178

Kapitel VI. Spektralanalysis unitärer und selbstadjungierter Operatoren 182

67. Die Zerlegung der Einheit 182
68. Das trigonometrische Momentproblem 184
69. Analytische Funktionen mit Werten auf einer Halbebene 187
70. Der Satz von BOCHNER-CHINTSCHIN 194
71. Die Spektraldarstellung eines unitären Operators 198
72. Operator-STIELTJES-Integrale 203
73. Integraldarstellung einer Gruppe unitärer Operatoren 207
74. Die Integraldarstellung der Resolvente eines selbstadjungierten Operators 210
75. Die Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren 215

76. Über Mengen vom Operatormaß Null in separablen Räumen 221
77. Funktionen von unitären Operatoren 224
78. Direkter Beweis für die Spektraldarstellung eines unitären Operators . . . 229
79. Die CAYLEY-Transformation 231
80. Vertauschbare Operatoren 236
81. Spektraldarstellung beschränkter normaler Operatoren 237
82. Das Spektrum selbstadjungierter und unitärer Operatoren 238
83. Das einfache Spektrum 242
84. Spektraltypen 248
85. Das mehrfache Spektrum 250
86. Kanonische Form eines selbstadjungierten Operators mit einem Spektrum endlicher Vielfachheit 252
87. Einige Bemerkungen über unitäre Invarianten selbstadjungierter Operatoren 255
88. Allgemeine Definition einer Funktion eines selbstadjungierten Operators . 257
89. Beispiele 259
90. Ringe beschränkter selbstadjungierter Operatoren 266
91. Eine charakteristische Eigenschaft der Funktionen eines selbstadjungierten Operators 270
92. Der Satz vom erzeugenden Operator 273

Kapitel VII. Spektrum und Störungen selbstadjungierter Operatoren 275

93. Das kontinuierliche Spektrum eines selbstadjungierten Operators 275
94. Die Sätze von H. WEYL und J. v. NEUMANN über vollstetige Störungen . . 278
95. Der absolutstetige und der singuläre Teil des Spektrums 285
96. Die Invarianz des absolut stetigen Spektrums bei endlich-dimensionalen Störungen 287
97. Definition und formale Eigenschaften der Wellenoperatoren 292
98. Existenz der Wellenoperatoren im Falle endlich-dimensionaler Störungen . 296
99. Übergang zum allgemeinen Fall nuklearer Störungen 300

Kapitel VIII. Theorie der Erweiterungen symmetrischer Operatoren 305

100. Defektindizes 305
101. Weitere Bemerkungen zur CAYLEY-Transformation 309
102. Die NEUMANNschen Formeln 311
103. Einfache symmetrische Operatoren 315
104. Die Struktur maximaler Operatoren 317
105. Die Spektren selbstadjungierter Erweiterungen eines vorgegebenen symmetrischen Operators 321
106. Die Formel von M. G. KREIN für die Resolvente der selbstadjungierten Erweiterungen eines vorgegebenen symmetrischen Operators 323
107. Über selbstadjungierte Erweiterungen halbbeschränkter Operatoren. . . . 328
108. Selbstadjungierte Erweiterungen beschränkter symmetrischer Operatoren mit in H nicht dichtem Definitionsbereich bei Erhaltung der Norm 332
109. Selbstadjungierte Erweiterungen eines halbbeschränkten symmetrischen Operators bei Erhaltung seiner unteren Grenze 337

Kapitel IX. Verallgemeinerte Erweiterungen und verallgemeinerte Spektralfunktionen symmetrischer Operatoren 343

110. Verallgemeinerte Zerlegung der Einheit. Satz von M. A. NEUMARK 343
111. Selbstadjungierte Erweiterungen, die aus dem Raum herausführen, und Spektralfunktionen symmetrischer Operatoren 347
112. Spektralfunktionen symmetrischer Operatoren und verallgemeinerte Resolventen 354

113. Die Formel von M. G. KREIN für verallgemeinerte Resolventen 360
114. Quasi-selbstadjungierte Erweiterungen und charakteristische Funktionen eines symmetrischen Operators 366
115. Dreiecksentwicklungen einiger nichtselbstadjungierter Operatoren 381

Anhang I. Integraloperatoren 386

116. Definitionen und Hilfssätze 386
117. Beispiel 390
118. Spektralfunktionen eines Integraloperators mit CARLEMANschem Kern . . 395
119. Spektraldarstellung CARLEMANscher Kerne 404
120. Verallgemeinerung der HILBERT-SCHMIDTschen Formeln 406
121. Charakteristische Eigenschaften der CARLEMANschen Integraloperatoren . . 408
122. Der Satz von J. v. NEUMANN 411

Anhang II. Differentialoperatoren 416

123. Selbstadjungierte Differentialausdrücke 416
124. Reguläre Differentialoperatoren 420
125. Selbstadjungierte Erweiterungen eines regulären Differentialoperators . . . 422
126. Singuläre Differentialoperatoren 425
127. Selbstadjungierte Erweiterungen eines singulären Differentialoperators . . 428
128. Die Resolventen selbstadjungierter Erweiterungen 431
129. Umkehrformeln, die mit Differentialoperatoren zweiter Ordnung zusammenhängen 440
130. Verallgemeinerung auf Differentialoperatoren beliebiger Ordnung 453
131. Die Untersuchung des Spektrums von Differentialoperatoren mit Hilfe der Aufspaltungsmethode 456
132. Beispiele 466

Literaturverzeichnis 476

Namenverzeichnis 482

Sachverzeichnis 483