

Inhaltsverzeichnis

1.	Der Begriff der Wahrscheinlichkeit. Allgemeine Theoreme	1
1.1.	Einleitung	1
1.2.	Ereignisse und Versuche	1
1.3.	Die Logik der Ereignisse	3
1.3.1.	Definition von Operationen auf der Menge der Ereignisse	3
1.3.2.	Eigenschaften der Operationen auf der Menge der Ereignisse	5
1.3.3.	Ereignisalgebren	5
1.3.4.	Das sichere Ereignis – das unmögliche Ereignis	6
1.4.	Der Begriff der Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis	6
1.4.1.	Das Prinzip der Homogenität und der Symmetrie	6
1.4.2.	Das Prinzip der relativen Häufigkeiten	7
1.4.3.	Bemerkungen zu den vorangehenden Definitionen	8
1.4.4.	Übungen	8
1.4.5.	Geometrische Wahrscheinlichkeiten	13
1.4.6.	Übungen	15
1.5.	Axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie	19
1.5.1.	Axiome	19
1.5.2.	Folgerungen aus den Axiomen	19
1.5.3.	Basis der Wahrscheinlichkeit	20
1.6.	Theoreme über totale Wahrscheinlichkeiten	21
1.7.	Gebundene Ereignisse – bedingte Wahrscheinlichkeiten	22
1.7.1.	Definitionen – Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten	22
1.7.2.	Die Unabhängigkeit von Ereignissen	25
1.8.	Übungen	26
1.9.	Das Problem der Wahrscheinlichkeit der Ursachen – Das Theorem von Bayes	35
2.	Zufallsvariable	38
2.1.	Der Begriff der Zufallsvariablen und die Wahrscheinlichkeitsverteilung	38
2.2.	Übungen	40
2.3.	Eigenschaften der Verteilungsfunktion	43
2.4.	Die gleichmäßige Verteilung	45
2.5.	Erwartungswert – Mittelwert – Momente	46
2.5.1.	Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen	46
2.5.2.	Der Erwartungswert einer Funktion einer Zufallsvariablen	46
2.5.3.	Spezialfälle: Die Momente	47
2.6.	Übungen	48
2.7.	Die Ungleichung von Bienaymé – Tschebyscheff	50
2.8.	Zufallsvariable – Funktion einer Zufallsvariablen	52
2.9.	Übungen	54
2.10.	Die bedingte Wahrscheinlichkeit eines mit einer Zufallsvariablen verbundenen Ereignisses	59

3.	Paare von Zufallsvariablen	63
3.1.	Definition	63
3.2.	Diskrete Paare	63
3.3.	Allgemeiner Fall	65
3.3.1.	Absolut stetige Paare von Zufallsvariablen	65
3.3.2.	Bedingte Verteilungsfunktion	66
3.4.	Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen	70
3.5.	Zufallsvariable – Funktion von Zufallsvariablen	72
3.6.	Übungen	77
3.7.	Erwartungswert und Momente	82
3.8.	Theoreme über die Mittelwerte	84
3.8.1.	Der Erwartungswert einer Summe von Zufallsvariablen	84
3.8.2.	Der Erwartungswert eines Produktes von unabhängigen Zufallsvariablen	85
3.8.3.	Der Erwartungswert einer Konstanten und des Produkts einer Zufallsvariablen mit einer Konstanten	86
3.8.4.	Die Varianz einer Konstanten	87
3.8.5.	Die Varianz von $c \cdot X$, wenn c eine Konstante ist	87
3.8.6.	Die Varianz einer Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen	87
3.9.	Der Korrelationskoeffizient	88
3.10.	Übungen	90
4.	Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	98
4.1.	Die Binomialverteilung	98
4.1.1.	Herkunft	98
4.1.2.	Darstellung der Binomialverteilung	99
4.1.3.	Bernoulli-Variable	100
4.1.4.	Momente der Binomialverteilung	100
4.2.	Die Pascalsche Verteilung	101
4.2.1.	Herkunft	101
4.2.2.	Darstellung der Pascalschen Verteilung	101
4.2.3.	Momente der Pascalschen Verteilung	102
4.3.	Die Poisson-Verteilung	104
4.3.1.	Definition	104
4.3.2.	Momente der Poisson-Verteilung	104
4.3.3.	Die Stabilität der Poisson-Verteilung	105
4.3.4.	Der Poisson-Prozess	106
4.4.	Übungen	109
4.5.	Die Laplace-Gauß-Verteilung	112
4.5.1.	Definition	112
4.5.2.	Momente	113
4.5.3.	Die Stabilität der Normalverteilung	115
4.6.	Übungen	116
4.7.	Die Normalverteilung in zwei Dimensionen	118

5.	Konvergenzprobleme	120
5.1.	Die stochastische Konvergenz und das schwache Gesetz der großen Zahlen	120
5.1.1.	Definition	120
5.1.2.	Das Theorem von Tschebyscheff	121
5.1.3.	Das Theorem von Bernoulli	122
5.2.	Konvergenz der Verteilung nach – Grenzverteilungen	123
5.2.1.	Definition	123
5.2.2.	Das Theorem von Moivre	123
5.2.3.	Das Theorem von Poisson	128
5.3.	Der Begriff der fast sicheren Konvergenz	129

Anhang

Aufgabe 1	131
Aufgabe 2	134
Aufgabe 3	139
Aufgabe 4	144
Aufgabe 5	154
Aufgabe 6	158
Aufgabe 7	162
Aufgabe 8	167