

Inhalt

Einleitung	11
I. Das Wahrscheinlichkeitsmodell	12
1. Mengen und Maße	13
Mengenkörper	13
Der Wahrscheinlichkeitsraum	16
Die Stetigkeit von Maßen	21
2. Funktionen	24
Umkehrabbildungen	24
Meßbare Abbildungen	27
Baire-Funktionen	30
3. Der E -Operator	32
Der E -Operator im endlichen Fall	32
Der E -Operator im abzählbaren Fall	35
4. Integrale und Erwartungswerte	37
Das Integral für nichtnegative meßbare Funktionen	37
Integrierbare Funktionen	42
Durch Integrale definierte Maße	45
Beziehungen „fast überall“	47
Eindimensionale Verteilungsfunktionen	51
Die Transformations-Regel	53
5. Ungleichungen	55
Jensensche Ungleichung und konvexe Funktionen	55
Die Räume \mathcal{Q}_α	61
6. Momente	64
Varianz, Kovarianz und Korrelationskoeffizient	64
Zweite Momente und Konvergenz im Quadratmittel	68
7. Die Fortsetzung eines Prämaßes zu einem Maß	69
Monotone Klassen	69
Die Fortsetzung eines Prämaßes	72
Vollständige Maß-Räume	77
Prämaße auf topologischen Räumen	81
σ -endliche Maße	83
8. Maße auf Produktmengen	85
Maße auf der reellen Zahlengraden	85

Maße auf dem \mathbb{R}^n	88
Produkte mit beliebig vielen Faktoren	95
9. Unabhängige zufällige Größen	100
Unabhängigkeit in endlichen Wahrscheinlichkeitsmodellen	100
Unabhängigkeit in beliebigen Wahrscheinlichkeitsmodellen	104
Produktmaße als Modelle für die Unabhängigkeit im allgemeinen Fall	107
Ein schwaches Gesetz der großen Zahlen	113
Fubini-Sätze	114
10. Das Radon-Nikodym-Theorem	121
Hahnsche Zerlegung und Jordansche Zerlegung	121
Der Satz von Radon und Nikodym	124
Die Lebesgue-Zerlegung	128
Ladungsverteilungen	129
11. Bedingte Wahrscheinlichkeiten und bedingte Erwartungswerte	136
Einführung der bedingten Wahrscheinlichkeit	136
Der bedingte Erwartungswert im endlichen Fall	141
Der bedingte Erwartungswert im allgemeinen Fall	143
Formeln für den bedingten Erwartungswert	149
II. Zufällige Größen mit abzählbar vielen Werten	153
1. Die Formel von K. Jordan	154
Binomialkoeffizienten	154
Jordansche Formel	154
„Probleme des rencontre“ oder „matching problem“	157
Besetzung von Plätzen durch Objekte	160
Jordansche Formel und binomiale Momente	162
Renyis Beweis der Jordanschen Formel	163
2. Erzeugende Funktionen	170
Definitionen	170
Erzeugende Funktionen und orthogonale Matrizen	176
Stirlingsche Zahlen	179
a) Zentrale, binomiale und faktorielle Momente	179
b) Beziehungen zwischen Potenzen und Faktoriellen	180
c) Erzeugende Funktionen für Stirlingsche Zahlen	183
3. Spezielle diskrete Verteilungen	186
Bernoulli-Verteilung	187
Binomial-Verteilung	187
Multinomial-Verteilung	189
Hypergeometrische Verteilung	191
Poly-hypergeometrische Verteilung	192
Poisson-Verteilung	194
Wartezeitverteilungen	196
a) Wartezeit bei Bernoulli-Verteilung	196
b) Geometrische Verteilung	198
c) Wartezeit bei hypergeometrischer Verteilung	199
d) Wartezeit bei einer speziellen multinomialen Verteilung	201
Polya-Verteilung	204

4. Differenzengleichungen	204
Definitionen	204
Homogene lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten	205
Inhomogene lineare Differenzengleichungen	210
Ein einfaches Lernmodell	211
Der ruinierte Spieler	214
a) Eine homogene Differenzengleichung	214
b) Eine inhomogene Differenzengleichung	217
c) Eine partielle Differenzengleichung	221
III. Charakteristische Funktionen und Konvergenz von Verteilungsfunktionen	224
1. Definition und einfache Eigenschaften charakteristischer Funktionen	225
Eigenschaften charakteristischer Funktionen	225
Charakteristische Funktionen und Momente	230
Holomorphe charakteristische Funktionen	233
2. Die Umkehrformel	235
Die Allgemeine Umkehrformel	235
Eine Umkehrformel für Dichten	239
Beispiele und Anwendungen	241
3. Die Konvergenz von Verteilungsfunktionen und charakteristischen Funktionen	245
Die Hellyschen Sätze	245
Vollständige Konvergenz	250
Masse-erhaltende Mengen von Maßen und trennende Klassen von Funktionen	253
Ein Satz von Cramèr	255
Der Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen	257
4. Maße auf dem \mathbb{R}^r und mehrdimensionale charakteristische Funktionen	266
Definitionen und Beispiele	266
Die Konvergenz von Maßen auf dem \mathbb{R}^r	268
Eindeutigkeit und Stetigkeit mehrdimensionaler charakteristischer Funktionen	274
Anwendungen	277
5. Momentenproblem und Bochnerscher Satz	279
Das Momentenproblem	279
Ein Beispiel	284
Der Bochnersche Satz	288
IV. Die Konvergenz zufälliger Größen	294
1. Die 0–1-Gesetze und Allgemeines über Konvergenzbegriffe	294
Ein Beispiel	294
Die 0–1-Gesetze	297
Konvergenzbegriffe für zufällige Größen	299
Cauchy-Folgen	304

Verteilungsfunktionen und Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit . .	308
Anwendungen	310
Linearformen auf \mathcal{L}_x	312
2. Gesetze der großen Zahlen	315
Allgemeines über Gesetze der großen Zahlen	315
Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen auf die empirische Verteilungsfunktion	318
Die Konvergenz von Summen unabhängiger zufälliger Größen . . .	321
Starke Gesetze der großen Zahlen	324
3. Zentrale Grenzwertsätze	330
4. Das Gesetz vom iterierten Logarithmus	338
5. Die Waldsche Identität	346
6. Fluktuationstheorie für Summen unabhängiger zufälliger Größen	357
Funktionentheoretischer Beweis einer Reihen-Identität	358
Die Operatoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B}	360
Einige Operatorgleichungen	363
Anwendungen auf K_n und I_n	368
Das Arcus-Sinus-Gesetz	370
Das Urnenproblem und das Stimmzettelpblem	371
Anwendungen auf die Theorie der Warteschlangen	376
Literaturverzeichnis	379
Namen- und Sachverzeichnis	381