

Table des Matières

CHAPITRE I. EVENEMENTS ET VARIABLES ALEATOIRES	1
1. Epreuves, événements et variables aléatoires	1
1.1. Le hasard	1
1.2. Description ensembliste des événements	2
1.3. Variables aléatoires	7
2. Tribus	10
2.1. Événements intéressants	10
2.2. Événements observables	12
2.3. Tribus	14
Exercices	17
CHAPITRE II. FORMULES DE BAYES ET INDEPENDANCE	18
1. Probabilité	18
1.1. Statistique et probabilités	18
1.2. Les axiomes	22
2. Indépendance statistique	24
2.1. Probabilité conditionnelle	24
2.2. Indépendance	26
3. Un problème d'existence	28
Exercices	31
CHAPITRE III. QUELQUES MODELES PROBABILISTES ELEMENTAIRES	33
1. Les trois prisonniers	33
2. Un pari intelligent	37
3. Un peu de génétique	39
4. La corde de Bertrand	45
Exercices	47

CHAPITRE IV. DISTRIBUTIONS DE PROBABILITE DISCRETES	49
1. Distributions usuelles	49
1.1. La distribution de Bernoulli	49
1.2. La distribution poissonnienne	51
1.3. La distribution binomiale	51
1.4. La distribution multinomiale	53
2. Espérance	54
2.1. Définition et propriétés	54
2.2. Moyenne, variance	57
2.3. Inégalités remarquables	58
3. Convergences en probabilité et en loi	61
3.1. Convergence en probabilité et la loi faible des grands nombres	61
3.2. Convergence en loi et le théorème des événements rares de Poisson	62
4. Indépendance	64
4.1. Somme de deux variables aléatoires indépendantes	64
4.2. La formule du produit	66
5. Fonctions génératrices	67
5.1. Définitions et exemples	67
5.2. Propriétés de la fonction génératrice	68
Exercices	77
 CHAPITRE V. QUANTITE D'INFORMATION	 80
1. Entropie de Shannon et codage	80
1.1. Les codes uniquement déchiffrables	80
1.2. Borne de Shannon sur la longueur moyenne d'un code déchiffrable	85
2. Le code optimal de Huffman	87
2.1. Présentation de l'algorithme de Huffman	87
2.2. Optimalité de l'algorithme de Huffman	89
2.3. Deux algorithmes de codage suboptimaux	92

3.	Introduction aux questionnaires	94
3.1.	Questionnaires et codage	94
3.2.	Le problème des billes	95
3.3.	$H_D(p)$ est bien une quantité d'information	96
4.	Compression de l'information	97
4.1.	Les suites typiques	97
4.2.	Le théorème de compression	99
4.3.	Compression de l'information et redondance	101
5.	L'interprétation de Boltzmann	102
	Exercices	105
CHAPITRE VI. LOIS DE PROBABILITE AVEC DENSITE		107
1.	Intégrales	107
1.1.	Rappels et anticipations	107
1.2.	Le théorème de Fubini	111
2.	Densité de probabilité des vecteurs aléatoires	113
2.1.	Moyenne, covariance, fonction caractéristique	113
2.2.	Un premier catalogue de densités de probabilités usuelles	116
3.	Fonctions caractéristiques et indépendance	120
3.1.	Fonction caractéristique et loi	120
3.2.	Somme de variables aléatoires indépendantes	122
4.	Transformations des vecteurs aléatoires	125
4.1.	La formule du changement de variables	125
4.2.	Le cas où le changement de variables n'est pas bijectif	128
	Exercices	132
CHAPITRE VII. PROCESSUS DE POISSON		136
1.	Le processus de Poisson homogène sur la droite	136
1.1.	Définition	136
1.2.	Le système infinitésimal d'un processus de Poisson homogène	137
1.3.	Répartition des points d'un processus de Poisson	141

2. Processus de Poisson dans le plan	143
2.1. Définition	143
2.2. Le théorème des événements rares pour les processus de Poisson sur \mathbb{R}^n	144
2.3. Processus de Poisson non homogène sur la droite	146
3. Opérations sur les processus de Poisson	147
3.1. Superposition	147
3.2. Effacement aléatoire	148
3.3. Filtrage	151
Exercices	155
 CHAPITRE VIII. LES GAUSSIENNES	 157
1. Vecteurs gaussiens	157
1.1. Pourquoi les gaussiennes ?	157
1.2. Variable aléatoire gaussienne	158
1.3. Vecteur aléatoire gaussien	159
2. Lois des vecteurs gaussiens	160
2.1. Densité d'un vecteur gaussien non dégénéré	160
2.2. Vecteur gaussien à deux dimensions	163
2.3. Vecteur gaussien dégénéré	165
2.4. Indépendance et non-corrélation dans les vecteurs gaussiens	167
3. Statistiques des échantillons gaussiens	168
3.1. Moyenne empirique et variance d'un échantillon gaussien	168
3.2. Statistiques de Fisher, Snedecor et Student	170
Exercices	172
 CHAPITRE IX. REGRESSION LINEAIRE	 174
1. Variables aléatoires de carré intégrable	174
1.1. Inégalité de Tchebychev	174
1.2. Coefficient de corrélation et inégalité de Schwarz	176

2. Régression linéaire	178
2.1. Un problème d'optimisation	178
2.2. Le cas unidimensionnel	179
2.3. Cas multidimensionnel	181
Exercices	186
CHAPITRE X. ESPERANCE CONDITIONNELLE	188
1. Définitions et propriétés élémentaires	188
1.1. Densité de probabilité conditionnelle	188
1.2. Le cas mixte	191
1.3. Propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle	193
2. Conditionnement des vecteurs aléatoires gaussiens	198
3. Le filtre de Kalman-Bucy	201
3.1. Un problème de guidage	202
3.2. L'algorithme de Kalman-Bucy	208
3.3. L'équation de Riccati du gain	211
Exercices	212
CHAPITRE XI. CONVERGENCES	214
1. Introduction : La loi des grands nombres et le théorème de la loi gaussienne limite	214
1.1. La loi des grands nombres	214
1.2. Le théorème de la loi gaussienne limite ("Central limit theorem")	215
2. Continuité séquentielle de la probabilité et lemme de Borel-Cantelli	216
2.1. Continuité séquentielle	216
2.2. Le lemme de Borel-Cantelli	219
3. Convergence presque sûre et loi des grands nombres	223
3.1. Convergence presque sûre	223
3.2. La hiérarchie des convergences	225
3.3. Loi des grands nombres pour les suites non-corrélées	227
3.4. Le lemme de Glivenko-Cantelli	229

4. Les déviations à la loi des grands nombres	231
5. Convergence en loi	236
5.1. Définitions	236
5.2. Le critère des fonctions caractéristiques	239
Exercices	242

CHAPITRE XII. TESTS D'HYPOTHESES

1. Tests d'hypothèses bayésiennes	246
1.1. Etats de la nature et observation	246
1.2. Exemples de la théorie des communications	247
1.3. Critère de la probabilité d'erreur et décision optimale	249
1.4. Hypothèses gaussiennes	251
1.5. Observations discrètes	254
2. Lemme de Neyman-Pearson	255
2.1. Le paradigme de la détection : erreurs de première et deuxième espèce	255
2.2. Le test de Neyman-Pearson	258
3. Le test du χ^2	260
3.1. Position du problème et description du test	260
3.2. Démonstration de la convergence en loi de la statistique T_n vers un χ^2	263
Exercices	267

SOLUTIONS DES EXERCICES

Chapitre I.	270
Chapitre II.	272
Chapitre III.	275
Chapitre IV.	280
Chapitre V.	285
Chapitre VI.	291

Chapitre VII.	301
Chapitre VIII.	306
Chapitre IX.	310
Chapitre X.	313
Chapitre XI.	319
Chapitre XII.	324
EXERCICES NON CORRIGES	328
BIBLIOGRAPHIE	333
INDEX	335