

Table

Avant-propos	9
Chapitre 1. Mesures abstraites	11
1.1. Anneaux et σ -anneaux de parties d'un ensemble	11
1.2. Anneaux, σ -anneaux et tribus engendrés par des familles de parties	15
1.3. Exemple : tribu de Borel d'un espace topologique	21
1.4. Fonctions additives et mesures sur une famille de parties d'un ensemble	24
1.5. Construction d'une mesure positive par prolongement	34
1.6. Ensembles négligeables	44
1.7. La mesure de Lebesgue de \mathbb{R}	47
1.8. Variation totale d'une mesure	50
1.9. Décomposition d'une mesure réelle	57
1.10. Mesures absolument continues, mesures étrangères	61
1.11. Exercices	64
Chapitre 2. Applications mesurables, intégration	71
2.1. Espaces et applications mesurables	72
2.2. Espaces mesurés, applications μ -étagées et μ -mesurables	82
2.3. Les espaces $L^1_\mu(E, F)$ et $L^1_\mu(E, F)$. Définition de l'intégrale	87
2.4. Les théorèmes de convergence	104
2.5. Mesures définies par une densité	113
2.6. Approximation par des fonctions μ -étagées particulières	123

2.7. Intégrales de Riemann et de Lebesgue des fonctions définies sur \mathbb{R}	126
2.8. Propriétés de l'intégrale de Lebesgue des fonctions définies sur \mathbb{R}	140
2.9. Exercices	148
Chapitre 3. L'intégrale de Daniell.....	151
3.1. Motivations de cette étude.....	152
3.2. Espaces de Riesz.....	152
3.3. Mesures et intégrales de Daniell.....	155
3.4. Propriétés de l'intégrale de Daniell.....	164
3.5. Mesures abstraites associées à une mesure de Daniell.....	170
3.6. Exercices	178
Chapitre 4. Espaces \mathcal{L}^p et L^p . Différents types de convergence..	181
4.1. Inégalités de Hölder et de Minkowski.....	182
4.2. Les espaces $\mathcal{L}_\mu^p(E, F)$ et $L_\mu^p(E, F)$	188
4.3. Sous-espaces denses de $\mathcal{L}_\mu^p(E, F)$	195
4.4. Relations d'ordre dans les espaces $\mathcal{L}_\mu^p(E, \mathbb{R})$ et $L_\mu^p(E, \mathbb{R})$	200
4.5. Convergences en moyenne, presque uniforme et μ -presque partout	203
4.6. Convergence en mesure.....	210
4.7. Familles équi-intégrables de fonctions.....	221
4.8. Diagramme récapitulatif des différents types de convergence...	227
4.9. Exercices	228
Chapitre 5. Mesure induite, mesure produit, mesure image	235
5.1. Mesure induite	236
5.2. Produit de deux mesures positives σ -finies	238
5.3. Produit d'une famille d'espaces mesurables.....	250
5.4. Produit d'une famille finie de mesures positives σ -finies.....	252
5.5. Application : la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n	253
5.6. Mesure image	257
5.7. Limite projective d'une famille d'espaces mesurés.....	260
5.8. Exercices	270

Chapitre 6. Décomposition d'une mesure relativement à une autre mesure positive	275
6.1. Rappel de quelques propriétés des espaces de Hilbert.....	275
6.2. Théorèmes de Lebesgue et de Radon-Nikodym.....	279
6.3. Dualité dans les espaces L^p	288
6.4. Exercices	296
Chapitre 7. Intégration sur un espace localement compact	299
7.1. Introduction	299
7.2. Rappel de quelques notions et résultats de topologie.....	300
7.3. Fonctions continues sur un espace normal et sur un espace localement compact.....	304
7.4. Intégrale relativement à une mesure de Radon positive.....	311
7.5. Propriétés de l'intégrale sur un espace localement compact.....	327
7.6. Exercices	330
Chapitre 8. Intégration et dérivation dans \mathbb{R}^n	335
8.1. Intégration indéfinie et dérivation : cas où la fonction intégrée est continue.....	336
8.2. Dérivation des mesures de Borel sur \mathbb{R}^n	343
8.3. Fonctions à variation bornée.....	352
8.4. Changements de variables dans \mathbb{R}^n	363
8.5. Exercices	376
Chapitre 9. Mesures de Radon sur un espace localement compact	381
9.1. Rappel de résultats de Topologie et d'Analyse.....	382
9.2. Mesures de Radon : définition et premières propriétés.....	391
9.3. Mesures de Radon réelles et complexes.....	393
9.4. Localisation d'une mesure de Radon.....	395
9.5. Espace vectoriel ordonné des mesures de Radon réelles.....	397
9.6. Majorante absolue d'une mesure de Radon complexe.....	402
9.7. Mesures de Radon bornées.....	406
9.8. Topologie vague sur l'espace des mesures de Radon.....	411
9.9. Convergence étroite de mesures de Radon bornées.....	419
9.10. Exercices	424

Chapitre 10. Introduction à la théorie des probabilités	429
10.1. Concepts de base et langage de la théorie des probabilités	430
10.2. Variables aléatoires et lois de probabilité.....	434
10.3. Dépendance et indépendance.....	438
10.4. Convergences de variables aléatoires.....	442
10.5. Probabilités et espérances conditionnelles.....	446
10.6. Lois des grands nombres.....	454
10.7. Exercices	460
Bibliographie	465
Index des notations	467
Index terminologique	469