

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1 : Introduction générale aux problèmes de temps d'arrêt optimal.

1. *Orientation.*
2. *Description formelle des problèmes de temps d'arrêt.*
3. *Caractérisation analytique par la programmation dynamique.*
4. *Exemples de problèmes de temps d'arrêt optimal.*
 - 4.1. Formulation bayésienne d'un problème de test.
 - 4.2. Modélisation d'un phénomène de rupture.
 - 4.3. Un problème de Warrant.
5. *Problèmes de temps d'arrêt optimal et problèmes de frontière libre.*
6. *Généralisations.*
7. *Différentes caractérisations de la fonction coût optimal.*

CHAPITRE 2 : Equations différentielles stochastiques et équations aux dérivées partielles linéaires du 2^e ordre.

Introduction

1. *Rappels sur le calcul des probabilités et la théorie des processus stochastiques.*
 - 1.1. Espace de probabilité. Variables aléatoires.
 - 1.2. Espérance - Espérance conditionnelle.
 - 1.3. Fonction de répartition - Fonction caractéristique.
 - 1.4. Généralités sur les processus stochastiques.
 - 1.5. Notions sur les martingales.
2. *Intégrales stochastiques.*
 - 2.1. Le processus de Wiener.
 - 2.2. Introduction des intégrales stochastiques.
 - 2.3. Propriétés des intégrales stochastiques comme fonction de la borne supérieure.
 - 2.4. Formule de ITO.
 - 2.5. Applications de la formule de ITO.

3. *Equations différentielles stochastiques : formulation forte.*
 - 3.1. Définition du problème.
 - 3.2. Etude du cas Lipschitzien.
 - 3.3. Etude du cas localement Lipschitzien.
 - 3.4. Utilisation des méthodes de monotonie.
 - 3.5. Equations multivoques monotones stochastiques.
4. *Equations différentielles stochastiques : formulation faible.*
 - 4.1. Lemme fondamental.
 - 4.2. Théorème de Girsanov.
5. *Equations aux dérivées partielles linéaires elliptiques du 2^{ème} ordre.*
 - 5.1. Résultats préliminaires.
 - 5.1.1. Espaces de Sobolev.
 - 5.1.2. Théorèmes de traces.
 - 5.2. Formulation variationnelle.
 - 5.3. Régularité H^2_α et interprétation du problème résolu.
 - 5.4. Régularité $W^{2,p}$.
 - 5.5. E.D.P. Elliptiques du 2^{ème} ordre dans R^n .
 - 5.5.1. Coefficients du premier ordre non bornés.
 - 5.5.2. Coefficients bornés.
6. *Equations aux dérivées partielles linéaires du second ordre de type parabolique.*
 - 6.1. Formulation variationnelle.
 - 6.2. Régularité.
 - 6.2.1. Régularité par rapport au temps.
 - 6.2.2. Régularité par rapport aux variables d'espaces.
 - 6.3. E.D.P. paraboliques du 2^{ème} ordre dans $R^n \times]0, T[$.
 - 6.3.1. Coefficients non bornés.
 - 6.3.2. Coefficients bornés.
 - 6.4. Propriétés de positivité de la solution.
 - 6.5. Opérateur de Green.
7. *Interprétation probabiliste de la solution des problèmes aux limites du 2^{ème} ordre.*
 - 7.1. Problème de Dirichlet.
 - 7.2. Problèmes elliptiques dans R^n .
 - 7.3. Interprétation des problèmes paraboliques dans $Q = \mathcal{O} \times]0, T[$.
 - 7.4. Problèmes paraboliques dans $R^n \times]0, T[$.
8. *Processus de Markov associé à la solution d'une équation différentielle stochastique.*
 - 8.1. Interprétation de la fonction $p(x, t_1, \xi, t_2)$.
 - 8.2. Notions sur les processus de Markov généraux.
 - 8.3. Une généralisation de la formule de ITO.

CHAPITRE 3 : Problèmes de temps d'arrêt optimal et inéquations variationnelles.

Introduction.

1. I.V. stationnaires.

- 1.1. Diverses formulations du problème.
- 1.2. Théorème d'existence et d'unicité. Cas coercif.
- 1.3. Pénalisation.
- 1.4. Démonstration de l'existence dans le théorème 1.1.
- 1.5. Estimation de "l'erreur de pénalisation".
- 1.6. Propriétés de monotonie de la solution.
- 1.7. Cas "non coercif".
- 1.8. Propriétés de la solution par rapport au domaine Ω .
- 1.9. Régularité de la solution.
- 1.10. La surface libre.
- 1.11. Ouvert non borné, coefficients bornés.
- 1.12. Propriétés du support de la solution.
- 1.13. Ouvert non borné, coefficients non bornés.
- 1.14. Autres inéquations.
- 1.15. Estimations pour Au .

2. Inéquations variationnelles d'évolution.

- 2.1. Les diverses formulations des problèmes.
- 2.2. Résultats d'existence et d'unicité pour les solutions fortes.
- 2.3. Pénalisation.
- 2.4. Démonstrations de l'existence dans les théorèmes 2.1. et 2.2.
- 2.5. Estimation de "l'erreur de pénalisation".
- 2.6. Solution faible maximum.
- 2.7. Quelques propriétés de la solution maximum.
- 2.8. Régularisation elliptique.
- 2.9. Semi-discrétisation.
- 2.10. Régularité de la solution.
- 2.11. Problème à frontière libre et problème de Stefan à une phase.
- 2.12. Compléments sur la régularité.
- 2.13. Propriétés de la solution par rapport au domaine Ω .
- 2.14. Horizon infini.
- 2.15. Ouvert non borné, coefficients bornés.
- 2.16. Supports.
- 2.17. Ouvert non borné, coefficients non bornés.
- 2.18. Autres inéquations.
- 2.19. Problèmes périodiques en t .
- 2.20. Estimation sur $-\frac{\partial u}{\partial t} + Au$.
- 2.21. Solution faible maximum comme enveloppe supérieure de sous-solutions.
- 2.22. Stabilité de la solution faible maximum.

3. Problèmes de temps d'arrêt optimal. Cas stationnaire.

- 3.1. Orientation.
- 3.2. Cas régulier - Ouvert borné.
- 3.3. Problèmes non homogènes.
- 3.4. Extension I. Affaiblissement des hypothèses sur les coefficients.
- 3.5. Extension II. Affaiblissement des hypothèses sur ψ et Φ et interprétation du problème pénalisé.
- 3.6. Extension III. Nouvel affaiblissement des hypothèses de régularité sur ψ et Φ .
- 3.7. Extension IV. Opérateurs qui ne sont pas sous forme divergence.
 - 3.7.1. Hypothèse - Notations.
 - 3.7.2. Le problème pénalisé.
 - 3.7.3. Etude de l'inéquation et résolution du problème de temps d'arrêt optimal.
 - 3.7.4. Application aux diffusions. Résultats supplémentaires.

- 3.8. Démonstration probabiliste de quelques propriétés des I.V.
- 3.9. Ouvert non borné.
 - 3.9.1. Coefficients bornés.
 - 3.9.2. Coefficients non bornés.
- 3.10. Etude d'une inéquation particulière.
- 3.11. Un complément de régularité.

4. *Problèmes de temps d'arrêt optimal. Cas d'évolution.*

- 4.1. Orientation.
- 4.2. Cas régulier - Ouvert borné.
- 4.3. Extension I. Affaiblissement des hypothèses sur les coefficients.
- 4.4. Extension II. Affaiblissement des hypothèses sur ψ et Φ et interprétation du problème pénalisé.
- 4.5. Extension III. Affaiblissement des hypothèses sur \bar{u} .
- 4.6. Extension IV. Nouvel affaiblissement des hypothèses sur ψ , Φ et u .
- 4.7. Extension V. Opérateurs qui ne sont pas sous forme divergence.
- 4.8. Horizon infini.
- 4.9. Problèmes de temps d'arrêt dans \mathbb{R}^n - Coefficients bornés.
- 4.10. Coefficients non bornés.
- 4.11. Problèmes périodiques en t .
- 4.12. Le principe de séparation pour les problèmes de temps d'arrêt.
 - 4.12.1. Introduction
 - 4.12.2. Problème de temps d'arrêt optimal.

5. *Jeux différentiels stochastiques avec temps d'arrêt.*

- 5.1. Le cas stationnaire.
 - 5.1.1. Hypothèses - Notations - Position du problème.
 - 5.1.2. Problème pénalisé.
 - 5.1.3. Résolution de l'inéquation.
 - 5.1.4. Estimation de l'erreur de pénalisation.
 - 5.1.5. Affaiblissement des hypothèses sur ϕ_1, ϕ_2 .
- 5.2. Le cas non stationnaire.
 - 5.2.1. Opérateurs non sous forme divergence.
 - 5.2.2. Opérateurs sous forme divergence.
 - 5.2.3. Principe de séparation.

CHAPITRE IV : Problèmes de temps d'arrêt et de contrôle optimal stochastique.

Introduction.

1. *Contrôle par "variable continue" et par temps d'arrêt.*

- 1.1. Orientation.
- 1.2. Le cas " \mathcal{O} borné" avec coefficients bornés.
- 1.3. Démonstration de l'unicité.
- 1.4. Pénalisation.
- 1.5. Démonstration de l'existence dans le théorème 1.1.
- 1.6. Régularité de la solution.
- 1.7. Propriétés de monotonie de la solution.
- 1.8. Le cas " \mathcal{O} non borné" avec coefficients bornés.
- 1.9. Horizon infini.
- 1.10. Le cas " \mathcal{O} non borné" avec coefficients non bornés.
- 1.11. Solution faible maximum.
- 1.12. Problèmes stationnaires.

2. *Rappels sur l'équation de Hamilton-Jacobi.*
 - 2.1. Notations et hypothèses.
 - 2.2. Interprétation de la solution de l'équation de H.J.
 - 2.3. Résolution de l'équation de H.J.
3. *Inéquation de Hamilton-Jacobi. Opérateur non sous forme divergence.*
 - 3.1. Schéma pénalisé. Interprétation.
 - 3.2. Inéquation de Hamilton-Jacobi et problème de temps d'arrêt optimal.
4. *Inéquations variationnelles de Hamilton-Jacobi.*
 - 4.1. Cas des jeux.
 - 4.2. Cas du contrôle.
5. *Contrôle sur les coefficients de plus haut degré.*
 - 5.1. Semi-groupe non linéaire associé à un problème de contrôle stochastique.
 - 5.1.1. Hypothèses - Notations.
 - 5.1.2. Semi-groupe non linéaire.
 - 5.2. Problème du contrôle stochastique.
 - 5.2.1. Equation de la programmation dynamique.
 - 5.2.2. Equation de Hamilton-Jacobi.
 - 5.3. Problème de temps d'arrêt optimal avec contrôle sur les coefficients de diffusion.
 - 5.3.1. Caractérisation comme élément maximum.
 - 5.3.2. Caractérisation par une inéquation variationnelle.
6. *Contrôle et temps d'arrêt optimaux avec croissance polynomiale.*
 - 6.1. Hypothèses - Notations - Le problème.
 - 6.2. Démonstration du théorème 6.1.
7. *Le principe de séparation.*
 - 7.1. Hypothèses - Notations - Le problème.
 - 7.2. Résultats préliminaires.
 - 7.3. Inéquation variationnelle.