

Inhalt

1. Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal	1
1.1 Die klassischen ungelösten Probleme	2
1.2 Koordinatisierung	4
1.3 Algebraisierung	8
1.4 Der Körpergrad	14
2. Algebraische Körpererweiterungen	23
2.1 Körpererweiterungen	24
2.2 Minimalpolynome	26
2.3 Endliche Körpererweiterungen	27
2.4 Algebraische Körpererweiterungen	29
3. Einfache Körpererweiterungen	33
3.1 Einfache Erweiterungen	33
3.2 Restklassenringe	34
3.3 Konstruktion einfacher algebraischer Erweiterungen	39
3.4 Konstruktion einfacher transzendenter Erweiterungen	42
3.5 Primkörper und Charakteristik eines Körpers	46
3.6 Charakterisierung einfacher algebraischer Erweiterungen	48
4. Grundbegriffe der Teilbarkeitslehre	53
4.1 Teilbarkeit	54
4.2 Idealtheorietische Beschreibung	55
4.3 Faktorielle Ringe	58
4.4 Eigenschaften faktorieller Ringe	61
4.5 Weitere Begriffe der Ringtheorie	64

5. Primzerlegung in Polynomringen	73
5.1 Vorbereitungen zum Satz von Gauß	73
5.2 Der Satz von Gauß	75
5.3 Irreduzibilitätskriterien	79
5.4* Der Satz von Stothers-Mason	84
6. Zerfällungskörper von Polynomen	91
6.1 Der algebraische Abschluss von Körpern	91
6.2 Tensorprodukte von K -Algebren	99
6.3 Das Lemma von Zorn	104
7. Separabilität	111
7.1 Separable Körpererweiterungen	112
7.2 Separable Polynome	117
7.3 Rein inseparable Erweiterungen	118
8. Galoissche Körpererweiterungen	125
8.1 Definition galoisscher Körpererweiterungen	125
8.2 Der Hauptsatz für endliche galoissche Erweiterungen	129
8.3 Die Galoisgruppe eines separablen Polynoms	132
8.4* Beispiele von 2-Erweiterungen	135
9. Endliche Körper, zyklische Gruppen und Einheitswurzeln ..	147
9.1 Existenz- und Eindeutigkeitsatz für endliche Körper	147
9.2 Eigenschaften zyklischer Gruppen	149
9.3 Die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers	151
9.4 Der Körper der n -ten Einheitswurzeln über K	154
9.5 Der Frobeniusautomorphismus in endlichen Körpern	158
10. Operationen von Gruppen auf Mengen	163
10.1 Die Bahnengleichung	163
10.2 Die Sylowsätze	170
11. Anwendungen der Galoisschen Theorie	181
11.1 Ein Konstruierbarkeitskriterium	181
11.2 Anwendung auf die n -Teilung des Kreises	182
11.3 Quadratische Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$	185
11.4 Das Quadratische Reziprozitätsgesetz	190

12. Ergänzung der Galoisschen Theorie	199
12.1 Der Verschiebungssatz	199
12.2 Lineare Unabhängigkeit von Körperhomomorphismen	202
12.3 Normalbasen	205
12.4 Unendliche Galoiserweiterungen	212
13. Norm und Spur	223
13.1 Grundlegende Eigenschaften von Norm und Spur	223
13.2 Norm und Spur in endlichen Körpererweiterungen	227
13.3 Hilberts Satz 90	230
14. Reine Gleichungen	237
14.1 Zyklische Erweiterungen	237
14.2 Kummertheorie	246
14.3 Struktur endlich erzeugter abelscher Gruppen	252
15. Auflösbarkeit von Gleichungen	269
15.1 Auflösbare Gleichungen und auflösbare Gruppen	270
15.2 S_n als Gruppe der allgemeinen Gleichung n -ten Grades	280
15.3 Exkurs über Permutationen	286
15.4 Auflösung kubischer Gleichungen	292
15.5 Auflösbare Gleichungen von Primzahlgrad	296
15.6 Hilberts Irreduzibilitätssatz	302
16. Ganzalgebraische Ringerweiterungen	307
16.1 Ganze Elemente einer Ringerweiterung	307
16.2 Ganz abgeschlossene Ringe	311
16.3 Ein Reduktionsprinzip der Galoistheorie	315
17. Die Transzendenz von π	327
17.1 Beweis der Transzendenz von π	327
17.2 Satz von Lindemann-Weierstraß	330
18. Transzendente Körpererweiterungen	335
18.1 Existenz von Transzendenzbasen	335
18.2 Der Transzendenzgrad	340
18.3 Der Noethersche Normalisierungssatz	341

19. Der Hilbertsche Nullstellensatz	347
19.1 Algebraische K -Mengen	347
19.2 Hilberts Nullstellensatz	349
19.3 Der Hilbertsche Basissatz	352
19.4 Folgerungen aus dem Hilbertschen Basissatz	354
19.5 Dimension affiner K -Varietäten	357
A. Einige Begriffe aus den Grundvorlesungen	367
A.1 Mengen	367
A.2 Gruppen	368
A.3 Körper	369
A.4 Vektorräume	369
A.5 Ringe	370
A.6 Algebren	372
A.7 R -Moduln und R -Algebren	372
Symbolverzeichnis	375
Literaturverzeichnis	379
Namensverzeichnis	383
Sachverzeichnis	385