

# Inhaltsverzeichnis

0. GRUNDLEGUNG	1
0.1. Variablen und deren Skalierung	1
0.2. Objektivität, Reliabilität und Validität von Meßverfahren	11
0.3. Stichproben und Grundgesamtheiten	13
1. EINIGE METHODISCHE GRUNDLAGEN DER STATISTISCHEN PRÜFUNG VON HYPOTHESEN	17
1.1. Einige Grundbegriffe	17
1.1.1. Gegenstände statistischer Prüfverfahren	17
1.1.2. Ein-Stichproben-Fall; Zwei-Stichproben-Fall; k-Stichproben-Fall; unabhängige und verbundene Stichproben	19
1.1.3. Einfache und zusammengesetzte Hypothesen	22
1.1.4. Punkt- und Bereichshypothesen	23
1.1.5. Alternativhypothesen zur Nullhypothese	23
1.1.6. Signifikanzteste	23
1.1.7. Verteilungsgebundene und verteilungsfreie Teste	23
1.2. Die Prüfung von Parameterhypothesen bei zweiseitigen Fragestellungen	24
1.3. Einseitige Fragestellungen	27
1.4. Fehler erster und zweiter Art; Gütefunktion und Operationscharakteristik eines Tests	29
1.5. Beste Teste und gleichmäßig beste Teste	37
1.6. Likelihood-Quotienten-Teste	42
1.7. Konsistenz und Unverzerrtheit von Testen	45
1.8. Testvergleiche	46
1.9. Merkmale und Vorteile verteilungsfreier Prüfverfahren	48
1.10. Einige Bemerkungen zur Robustheit verteilungsgebundener Prüfverfahren	50
1.11. Generelle technische Probleme der Durchführung von Prüfverfahren bei diskreten Prüfverteilungen	50
1.11.1. Das Signifikanzniveau bei diskreten Prüfverteilungen	50
1.11.2. Tabellen diskreter Prüfverteilungen	53
1.11.3. Normalapproximation diskreter Prüfverteilungen	54
1.12. Bindungen (Verbundwerte)	54
1.13. Allgemeine Probleme der Anwendung statistischer Teste	55
2. VERTEILUNGSFREIE PRÜFVERFAHREN ZUM EIN-STICHPROBEN-FALL	56
2.1. Prüfung der Zufälligkeit einer Stichprobenentnahme	56

2.1.1.	Prüfung der Zufälligkeit mit Hilfe der Anzahl der Runs (der einfache Run-Test)	57
2.1.2.	Prüfung der Zufälligkeit mit Hilfe der Anzahl der Runs Up or Down	66
2.1.3.	Ergänzende Bemerkungen	69
2.2.	Anpassungsteste zum Ein-Stichproben-Fall	70
2.2.1.	Normalitäts-"Teste" im Wahrscheinlichkeitsnetz	70
2.2.2.	Prüfung von Verteilungshypothesen auf der Grundlage der Theorie der Positionsstichprobenfunktionen	75
2.2.3.	Prüfung von Verteilungshypothesen mit Hilfe von Binomialtesten	78
2.2.4.	Mehrschrittige Prüfung von Verteilungshypothesen mit Hilfe von Positionsstichprobenfunktionen	80
2.2.5.	Mehrschrittige Prüfung von Verteilungshypothesen mit Hilfe von kumulierten Häufigkeiten	83
* 2.2.6.	Der <i>Kolmogorov-Smirnov</i> -Ein-Stichproben-Test	86
* 2.2.7.	Der $\chi^2$ -Test	90
2.2.8.	Vergleichende Betrachtung der beschriebenen Anpassungsteste	95
2.3.	Lokalisationsteste zum Ein-Stichproben-Fall	102
2.3.1.	Der Vorzeichentest für Quantile, insbesondere den Median	102
2.3.2.	Der Vorzeichen-Rang-Test von <i>Wilcoxon</i> zur Prüfung des Medians (Erwartungswertes) einer symmetrischen Verteilung	103
2.3.3.	Vorzeichentest und Vorzeichen-Rang-Test beim Zwei-Stichproben-Fall (verbundene Stichproben)	107
2.3.4.	Vergleich von Vorzeichentest, Vorzeichen-Rang-Test und t-Test	108
3.	VERTEILUNGSFREIE PRÜFVERFAHREN ZUM ZWEI-STICHPROBEN-FALL BEI UNABHÄNGIGEN STICHPROBEN	110
3.1.	Verschiedene Anwendungsmodelle zum Zwei-Stichproben-Fall bei unabhängigen Stichproben	110
3.2.	Verteilungsfreier Lokalisationsvergleich bei zwei unabhängigen Stichproben	112
3.2.1.	Der <i>Wilcoxon-Mann-Whitney</i> -Test	113
3.2.1.1.	Methodische Voraussetzungen und Nullhypothese	113
3.2.1.2.	Die Prüfvariable ( <i>Wilcoxon</i> sche Variante)	115
* 3.2.1.3.	Die <i>Mann-Whitney</i> sche Prüfvariable	116
* 3.2.1.4.	Zur Nullverteilung der Prüfvariablen des <i>Wilcoxon-Mann-Whitney</i> -Tests	118
3.2.1.5.	Die Prüfung der Nullhypothese	122
3.2.1.6.	Die Behandlung von Bindungen	123
3.2.1.7.	Vergleich des <i>Wilcoxon-Mann-Whitney</i> -Tests mit dem Zwei-Stichproben-t-Test	126

3.2.2.	Der <i>Fisher-Yates</i> -Test ( $c_1$ -Test von <i>Terry</i> ; <i>Terry-Hoeffding</i> -Test)	127
3.2.2.1.	Die Prüfvariable des <i>Fisher-Yates</i> -Tests	127
3.2.2.2.	Die Expected Normal Scores	127
3.2.2.3.	Zur Nullverteilung der Prüfvariablen des <i>Fisher-Yates</i> -Tests	129
3.2.2.4.	Vergleich mit dem <i>Wilcoxon-Mann-Whitney</i> -Test	130
3.2.3.	Der X-Test von <i>van der Waerden</i>	130
3.2.3.1.	Die Prüfvariable des X-Tests	130
3.2.3.2.	Die Quantile der Standardnormalverteilung	131
3.2.3.3.	Zur Nullverteilung der Prüfvariablen des X-Testes von <i>van der Waerden</i>	132
3.3.	Verteilungsfreier Streuungsvergleich bei zwei unabhängigen Stichproben	133
3.3.1.	Methodische Voraussetzungen und Nullhypothese für verschiedene Testverfahren zum Streuungsvergleich	134
3.3.2.	Der Test von <i>Siegel-Tukey</i>	136
3.3.3.	Hinweise auf weitere verteilungsungebundene Verfahren zum Variabilitätsvergleich	140
3.3.4.	Vergleich der verteilungsfreien Variabilitätsteste mit dem F-Test	141
3.4.	Das gemeinsame Konstruktionsprinzip der behandelten Tests	142
3.5.	Verteilungsvergleich bei zwei unabhängigen Stichproben	143
3.5.1.	<i>Fishers</i> Exact Probability Test	143
* 3.5.2.	Der <i>Kolmogorov-Smirnov</i> -Zwei-Stichproben-Test	147
3.5.3.	Der $\chi^2$ -Zwei-Stichproben-Test	150
3.5.4.	Vergleichende Betrachtung der behandelten Tests	154
4.	VERTEILUNGSFREIE PRÜFVERFAHREN ZUM ZWEI-STICHPROBEN-FALL (VERBUNDENE STICHPROBEN)	155
4.1.	Zwei verbundene Stichproben	155
4.2.	Verteilungsfreier Lokalisationsvergleich bei zwei verbundenen Stichproben	155
✦ 4.2.1.	Der Vorzeichentest und der Vorzeichen-Rang-Test von <i>Wilcoxon</i>	155
✦ 4.2.2.	Der Test von <i>McNemar</i>	156
4.3.	Rangkorrelationskoeffizienten	159
4.3.1.	Anknüpfung an den <i>Bravais-Pearsons</i> chen Maßkorrelationskoeffizienten	159
4.3.2.	Der Rangkorrelationskoeffizient von <i>Spearman-Pearson</i>	162
4.3.3.	Der Rangkorrelationskoeffizient von <i>Kendall</i>	169
✦ 4.3.3.1.	<i>Kendalls</i> Koeffizient für die Grundgesamtheit	169

4.3.3.2.	<i>Kendalls</i> Koeffizient für die Stichprobe	171
4.3.3.3.	Die Prüfung der Unabhängigkeitshypothese	173
4.4.	Der $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest	175
5.	VERTEILUNGSFREIE PRÜFVERFAHREN ZUM k-STICHPROBEN-FALL	180
5.1.	Verteilungsfreier Lokalisationsvergleich bei k unabhängigen Stichproben (Einfach-Klassifikation)	182
5.1.1.	Allgemeine Vorüberlegungen	182
5.1.2.	Der F-Test der klassischen einfaktoriellen Varianzanalyse	184
5.1.3.	Methodische Voraussetzungen und Nullhypothese der verteilungsungebundenen Varianzanalyse	189
x 5.1.4.	Die Rangvarianzanalyse von <i>Kruskal</i> und <i>Wallis</i> (der H-Test)	191
5.1.4.1.	Grundlagen und Definition der Prüfvariablen	191
5.1.4.2.	Zur Nullverteilung der Prüfvariablen des <i>Kruskal-Wallis</i> -Tests	194
5.1.4.3.	Die Prüfung der Nullhypothese	199
5.1.4.4.	Die Behandlung von Bindungen	200
5.1.4.5.	Vergleich des <i>Kruskal-Wallis</i> -Tests mit anderen Prüfverfahren	201
5.1.5.	Ein Test gegen die spezielle Alternativhypothese wachsender Treatment-Effekte: Der <i>Jonckheere</i> -Test	202
5.1.5.1.	Methodische Voraussetzungen und Definition der Prüfvariablen	202
5.1.5.2.	Zur Nullverteilung des <i>Jonckheere</i> -Tests	205
5.1.5.3.	Die Prüfung der Nullhypothese	206
5.1.5.4.	Die Behandlung von Bindungen	208
5.1.5.5.	Abschließende Bemerkungen	209
5.1.6.	Erweiterungen des <i>Fisher-Yates</i> -Tests und des X-Testes von <i>van der Waerden</i>	209
5.1.7.	Der $\chi^2$ -Test bei k unabhängigen Stichproben	212
5.2.	Verteilungsfreier Lokalisationsvergleich bei k abhängigen Stichproben (zufällige Blockdesigns)	215
5.2.1.	Verschiedene Anwendungsmodelle zum k-Stichproben-Fall bei abhängigen Stichproben	215
x 5.2.2.	Die Rangvarianzanalyse von <i>Friedman</i>	219
5.2.2.1.	Grundlagen und Definition der Prüfvariablen	219
5.2.2.2.	Zur Nullverteilung der Prüfvariablen des <i>Friedman</i> -Tests	222
5.2.2.3.	Die Prüfung der Nullhypothese	226
5.2.2.4.	Die Behandlung von Bindungen	226

5.2.2.5.	Abschließende Bemerkungen	227
5.2.3.	Ein Test gegen die spezielle Alternativhypothese wachsender Treatment-Effekte: Der Test von <i>Page</i>	228
✕ 5.2.4.	Der Test von <i>Cochran</i>	230
5.2.4.1.	Darstellung des Stichprobenbefundes und Prüfung der Nullhypothese	230
5.2.4.2.	Zur Prüfvariablen $\tilde{q}$ und ihrer Nullverteilung	232
5.3.	Verteilungsfreie multiple Lokalisationsvergleiche zum k-Stichproben-Fall	237
5.3.1.	Multiple Lokalisationsvergleiche	237
5.3.2.	k-Stichproben-Paarvergleiche (all treatment comparisons) bei unabhängigen Stichproben (einfaktorielle Versuchspläne)	240
5.3.2.1.	Multiple Lokalisationsvergleiche	240
5.3.2.2.	Herleitung der Verfahren	242
5.3.2.3.	Die Behandlung von Bindungen	248
5.3.2.4.	Dichotome Untersuchungsvariablen	249
5.3.2.5.	Abschließende Bemerkungen	252
5.3.3.	Versuchs-versus-Kontrollgruppen-Paarvergleiche (treatment vs. control) für k unabhängige Stichproben (einfaktorielle Versuchspläne)	253
5.3.3.1.	Multiple Lokalisationsvergleiche	253
5.3.3.2.	Herleitung der Verfahren	255
5.3.4.	k-Stichproben-Paarvergleiche (all treatment comparisons) für abhängige Stichproben (zufällige Blockdesigns)	256
5.3.4.1.	Multiple Lokalisationsvergleiche	257
5.3.4.2.	Herleitung der Verfahren	258
5.3.4.3.	Abschließende Bemerkungen	259
5.3.5.	Versuchs-vs.-Kontrollgruppen-Paarvergleiche (treatment vs. control) für abhängige Stichproben (zufällige Blockdesigns)	260
5.3.5.1.	Multiple Lokalisationsvergleiche	261
5.3.5.2.	Herleitung der Verfahren	261
6.	GRUNDFRAGEN DES EINSATZES VON TESTEN IN DEN ANWENDUNGEN	263
6.1.	Die Formulierung der Nullhypothese	263
6.1.1.	Testvoraussetzungen und Testgegenstände	263
6.1.2.	Nullhypothese und Stichprobenbefund	266
6.2.	Die Auswahl des adäquaten Prüfverfahrens	267
6.3.	Die Festlegung von Fehlerwahrscheinlichkeiten, insbesondere des Signifikanzniveaus	268
6.3.1.	Der Wert des Signifikanzniveaus	268
6.3.2.	Wahrscheinlichkeiten von Fehlern 2. Art	271

6.4. Die Datengrundlage von Testen	272
6.4.1. Der qualitative Aspekt	272
6.4.2. Kleine Stichprobenumfänge	273
6.4.3. Der Einsatz mehrerer Teste bei einem Datensatz	273
6.4.3.1. Die Problematik im einzelnen	273
6.4.3.2. Die allgemeine Kennzeichnung des Problems	276
6.4.3.3. Eine Verallgemeinerung der Problemstellung	277
6.4.3.4. Folgerungen	278
7. TABELLENANHANG	279
Tabelle I: Standardnormalverteilung	282
Tabelle II: Quantile der Standardnormalverteilung (Kurzfassung)	283
Tabelle III: Untere Quantile der $\chi^2$ -Verteilung	284
Tabelle IV: Obere Quantile der $\chi^2$ -Verteilung	285
Tabelle V: 0,975-Quantile der F-Verteilung	286
Tabelle VI: Obere Quantile der t-Verteilung	288
Tabelle VII: Ausschnitt aus einer (Pseudo-) Zufallszahlentafel	289
Tabelle VIII: Kritische Werte beim einfachen Run-Test	290
Tabelle IX: Kritische Werte beim Zufälligkeitstest mit Hilfe der Anzahl der Runs Up or Down	292
Tabelle X: Kritische Werte der Prüfvariablen des OS-Tests (0,025- und 0,975-Quantile der Betaverteilung)	293
Tabelle XI: Kritische Werte beim <i>Kolmogorov-Smirnov</i> -Ein-Stichproben-Test	296
Tabelle XII: Binomialverteilung mit $\theta = 0,5$	297
Tabelle XIII: Kritische Werte beim Vorzeichen-Rang-Test von <i>Wilcoxon</i>	298
Tabelle XIV: Kritische Werte beim <i>Wilcoxon-Mann-Whitney</i> -Test	300
Tabelle XV: Expected normal scores	302
Tabelle XVI: Kritische Werte beim <i>Fisher-Yates</i> -Test	303
Tabelle XVII: Obere Quantile der Standardnormalverteilung (ausführliche Fassung)	305
Tabelle XVIII: Kritische Werte beim X-Test von <i>van der Waerden</i>	308
Tabelle XIX: Hilfstabelle zur Durchführung des X-Tests von <i>van der Waerden</i>	310

Tabelle XX:	Kritische Werte bei <i>Fishers</i> Exact Probability Test	311
Tabelle XXI:	Kritische Werte beim <i>Kolmogorov-Smirnov-Zwei-Stichproben-Test</i>	313
Tabelle XXII:	Kritische Werte zur Unabhängigkeitsprüfung mit Hilfe des <i>Spearman-Pearsonschen</i> Rangkorrelationskoeffizienten	315
Tabelle XXIII:	Kritische Werte zur Unabhängigkeitsprüfung mit Hilfe des <i>Kendallschen</i> Rangkorrelationskoeffizienten	316
Tabelle XXIV:	Kritische Werte beim <i>Kruskal-Wallis-Test</i>	317
Tabelle XXV:	Kritische Werte beim <i>Jonckheere-Test</i>	319
Tabelle XXVI:	Kritische Werte beim <i>Friedman-Test</i>	321
Tabelle XXVII:	Kritische Werte beim Test von <i>Page</i>	325
Tabelle XXVIII:	Obere Quantile der Spannweite von n unabhängigen standardnormalverteilten Variablen	326
Tabelle XXIX:	Obere Quantile der Verteilung des Maximums von n standardnormalverteilten Zufallsvariablen, welche je mit $\rho = 0,5$ korreliert sind	327
L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s		328
A u t o r e n v e r z e i c h n i s		336
S a c h v e r z e i c h n i s		341