

## Inhaltsverzeichnis

1. Mathematische Grundlagen	1
1.1. Das Rechnen mit dem Summenzeichen und dem Produktzeichen	1
1.1.1. Das Summenzeichen	1
1.1.2. Das Produktzeichen	15
1.2. Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion	17
1.3. Grundzüge der Mengenlehre	20
1.3.1. Grundlagen	20
Begriff der Menge 20; Die Beschreibung von Mengen 21; Die leere Menge 23; Geordnete Paare und Produktmenge 24; Teilmenge und Obermenge 27	
1.3.2. Operationen auf Mengen	29
Komplement von Mengen 29; Durchschnitt von Mengen 30; Vereinigung von Mengen 31; Differenz von Mengen 33	
1.3.3. Rechenregeln für Mengen	34
1.3.4. Abbildungen und Funktionen	38
1.3.5. Die Mächtigkeit von Mengen	40
1.3.6. Systeme von Teilmengen: $\sigma$ -Algebren	41
1.4. Elemente der Kombinatorik	45
1.4.1. Einführung	45
1.4.2. Binomialkoeffizienten	48
1.4.3. Geordnete Stichproben	51
Geordnete Stichproben mit Zurücklegen 51; Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen 52	
1.4.4. Ungeordnete Stichproben	54
Ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen 54; Verallgemeinerung für ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen: sukzessive Ziehung mehrerer Stichproben 58; Ungeordnete Stichproben mit Zurücklegen 60	
1.5. Die Betafunktion und Gammafunktion	61
1.5.1 Die Gammafunktion	61
1.5.2 Die Betafunktion	64
Aufgaben zu Kapitel 1	66

## VIII

2. Wahrscheinlichkeitsräume	72
2.1. Zufallsvorgänge	72
2.2. Der Stichprobenraum (Ergebnisraum)	76
2.3. Ereignissysteme	77
2.4. Wahrscheinlichkeiten	82
2.4.1. Definition der Wahrscheinlichkeit	82
2.4.2. Folgerungen	84
2.4.3. Interpretation der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen	85
2.4.4. Die zahlenmäßige Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse	87
2.4.4.1. Die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bei diskreten Stichprobenräumen	88
Die a-priori-Methode 88; Die statistische Bestimmung 89; Vergleich der beiden Methoden 91; Die subjektive Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten 93	
2.4.4.2. Die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bei stetigen Stichprobenräumen	94
Aufgaben zu Kapitel 2	99
3. Bedingte Wahrscheinlichkeit; stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen	103
3.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit	103
3.1.1. Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit	103
3.1.2. Das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten	109
3.1.3. Die Regel von Bayes	111
3.2. Die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen	113
3.3. Folgen unabhängiger Zufallsvorgänge	117
Aufgaben zu Kapitel 3	120
4. Zufallsvariablen und ihre Verteilungen	124
4.1. Eindimensionale Zufallsvariablen und ihre Verteilungen	124
4.1.1. Eindimensionale Zufallsvariablen	124
4.1.2. Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	130
4.1.3. Diskrete Zufallsvariablen und ihre Verteilungen	133
Wahrscheinlichkeitsfunktion 133; Verteilungsfunktion 136	

## IX

4.1.4. Stetige Zufallsvariablen und ihre Verteilungen Dichtefunktion 139; Verteilungsfunktion 142	138
4.1.5. Lineare Transformationen von Zufallsvariablen und deren Verteilungen	145
4.2. Zweidimensionale Zufallsvariablen und ihre Verteilungen	150
4.2.1. Zweidimensionale Zufallsvariablen	150
4.2.2. Die Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufalls- variablen	153
4.2.3. Diskrete zweidimensionale Zufallsvariablen und ihre Ver- teilungen Wahrscheinlichkeitsfunktion 155; Verteilungsfunktion 157	154
4.2.4. Stetige zweidimensionale Zufallsvariablen und ihre Ver- teilungen Dichtefunktion 159; Verteilungsfunktion 161	158
4.2.5. Transformationen von zweidimensionalen Zufallsvariablen	162
4.2.6. Randverteilungen für die Zufallsvariablen $X_1$ und $X_2$	165
4.2.7. Bedingte Verteilungen für die Zufallsvariablen $X_1$ und $X_2$	169
4.2.8. Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen	172
4.2.9. Funktionen von zweidimensionalen Zufallsvariablen	179
4.3. Bemerkungen zur Betrachtung von n-dimensionalen Zufallsvaria- blen	184
Aufgaben zu Kapitel 4	189
5. Maßzahlen von Zufallsvariablen bezüglich ihrer Verteilungen	192
5.1. Maßzahlen für eindimensionale Zufallsvariablen	193
5.1.1. Der Erwartungswert	193
5.1.1.1. Definition	193
5.1.1.2. Der Erwartungswert einer Funktion einer eindimensionalen Zufallsvariablen	198
5.1.1.3. Der Erwartungswert für eine Funktion einer mehrdimensio- nalen Zufallsvariablen	201
5.1.2. Die Varianz	205
5.1.2.1. Definition	205
5.1.2.2. Die Varianz für eine Funktion von Zufallsvariablen	209
5.1.3. Momente von eindimensionalen Zufallsvariablen	211
5.1.4. Die Ungleichung von Tchebycheff	212
5.1.5. Die momenterzeugende Funktion Definition 217; Die Berechnung von Momenten mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion 218; Die momenterzeugende Funk- tion für Funktionen von Zufallsvariablen 221	217

5.2. Maßzahlen für zweidimensionale Zufallsvariablen	224
5.2.1. Die Definition der Kovarianz	224
5.2.2. Die Kovarianz für lineare Funktionen von Zufallsvariablen	228
5.2.3. Momente von zweidimensionalen Zufallsvariablen	230
5.2.4. Die Varianz einer Summe von Zufallsvariablen	231
Aufgaben zu Kapitel 5	233
6. Das schwache Gesetz der großen Zahlen; Konvergenzbegriffe	236
6.1. Einführung	236
6.2. Das schwache Gesetz der großen Zahlen	238
6.2.1. Das schwache Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli	238
6.2.2. Varianten des schwachen Gesetzes der großen Zahlen	246
6.2.3. Der Begriff der stochastischen Konvergenz	250
6.3. Die Konvergenz der Verteilung nach	251
7. Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	254
7.1. Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen für diskrete Zufallsvariablen	255
7.1.1. Die diskrete Gleichverteilung	255
7.1.2. Die hypergeometrische Verteilung Darstellung der Problemstellung durch ein Urnenmodell 257; Wahrscheinlichkeitsfunktion 258; Verteilungsfunktion 261; Erwartungswert 261; Varianz 262; Verallgemeinerung 264	257
7.1.3. Die Binomialverteilung Darstellung der Problemstellung durch ein Urnenmodell 265; Wahrscheinlichkeitsfunktion 266; Verteilungsfunktion 268; Erwartungswert 268; Varianz 269; Reproduktivitätseigenschaft 269; Binomialverteilung als Grenzverteilung der hypergeometrischen Verteilung 270; Verallgemeinerung 272	265
7.1.4. Die geometrische Verteilung Darstellung der Problemstellung als Urnenmodell 272; Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion 273; Erwartungswert 275; Varianz 277	272
7.1.5. Die negative Binomialverteilung Darstellung der Problemstellung durch ein Urnenmodell 278; Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion 279; Erwartungswert und Varianz 281	278

7.1.6. Die Poisson-Verteilung	283
Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion 283; Erwartungswert 284; Varianz 285; Die Poissonverteilung als Grenzverteilung der Binomial-hypergeometrischen und negativen Binomialverteilung 286; Ableitung der Poisson-Verteilung aus dem Poisson-Prozeß 290; Reproduktivitätseigenschaft 295	
7.2. Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen für stetige Zufallsvariablen	298
7.2.1. Die stetige Gleichverteilung	298
Dichte- und Verteilungsfunktion 298; Erwartungswert und Varianz 299	
7.2.2. Die Normalverteilung	299
Dichte- und Verteilungsfunktion 300; Erwartungswert 303; Varianz 304; momenterzeugende Funktion 305; Reproduktivitätseigenschaft 306; Standardnormalverteilung 309; Der zentrale Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy 312; Die Normalverteilung als Grenzverteilung ausgewählter diskreter Verteilungen (Binomialverteilung, hypergeometrische Verteilung, Poisson-Verteilung, negative Binomialverteilung. Übersicht über Approximationsmöglichkeiten) 315	
7.2.3. Die Gamma-Verteilung und ihre Spezialfälle Exponentialverteilung und $\chi^2$ -Verteilung	323
7.2.3.1. Die Gamma-Verteilung	323
7.2.3.2. Die Exponentialverteilung	324
Dichte- und Verteilungsfunktion 325; Erwartungswert und Varianz 326; Reproduktivitätseigenschaft 328	
7.2.3.3. Die $\chi^2$ -Verteilung	329
Dichte- und Verteilungsfunktion 329; Erwartungswert und Varianz 331; Reproduktivitätseigenschaft 332; Beziehungen zur Normalverteilung (Verteilung einer Summe von unabhängigen, quadrierten Standardnormalvariablen; Normalverteilung als Grenzverteilung der $\chi^2$ -Verteilung) 333	
7.2.4. Die t-Verteilung von Student	335
Dichte- und Verteilungsfunktion 335; Erwartungswert 336; Varianz 338; Die Normalverteilung als Grenzverteilung der t-Verteilung 339	
7.2.5. Die F-Verteilung	340
Dichtefunktion 340; Erwartungswert 341; Varianz 341; Beziehungen zur Normal- $\chi^2$ - und t-Verteilung 342; reziproke Symmetrie 344	
Aufgaben zu Kapitel 7	346
Anhang: Lösungshinweise zu den Aufgaben	350
Literaturhinweise	400
Sachregister	401