

# Inhalt

## 1 Lineare Algebra

|   |    |
|---|----|
| 1.1 Lineare Funktionen, Austausch . . . . .                       | 11 |
| 1.11 Summenkontrollen . . . . .                                   | 14 |
| 1.12 Transponierte Beschriftung . . . . .                         | 14 |
| 1.13 Modifizierter Austausch . . . . .                            | 16 |
| 1.2 Inversion . . . . .   | 16 |
| 1.21 Lösung linearer Gleichungen durch Inversion . . . . .        | 17 |
| 1.22 Ausnahmefälle, theoretische Folgerungen . . . . .            | 18 |
| 1.23 Folgerungen für die Rechenpraxis . . . . .                   | 21 |
| 1.3 Praktische Auflösung linearer Gleichungen . . . . .           | 21 |
| 1.31 Gaußsche Elimination . . . . .                               | 21 |
| 1.32 Nachträgliche Berechnung der inversen Matrix . . . . .       | 24 |
| ○ 1.33 Rundungsfehler . . . . .                                   | 24 |
| 1.34 Überwiegende Diagonale, konzentrierter Algorithmus . . . . . | 25 |

## 2 Lineare Programmierung

|   |    |
|---|----|
| 2.1 Ein Einführungsbeispiel. . . . .                              | 28 |
| 2.11 Graphische Lösung . . . . .                                  | 29 |
| 2.2 Lösung eines Programms mit dem Austauschverfahren . . . . .   | 30 |
| 2.3 Geometrische Interpretation des Simplex-Algorithmus . . . . . | 34 |
| 2.4 Verallgemeinerungen . . . . .                                 | 36 |
| 2.41 Der allgemeinste Fall . . . . .                              | 38 |
| 2.5 Duale Lösungsmethode . . . . .                                | 40 |
| 2.6 Anwendung auf die Spieltheorie . . . . .                      | 42 |
| 2.61 Spiele mit Sattelpunkt . . . . .                             | 46 |
| 2.7 Ausgleichung nach Tschebyscheff . . . . .                     | 47 |

## 3 Ausgleichung nach kleinsten Quadraten und definite Probleme

|  |    |
|--|----|
| 3.1 Die Methode der kleinsten Quadrate . . . . .       | 52 |
| 3.11 Mittleres Residuum . . . . .                      | 55 |
| 3.12 Mehrere Unbekannte . . . . .                      | 57 |
| 3.2 Definite Probleme . . . . .                        | 60 |
| 3.21 Geometrische Interpretation . . . . .             | 62 |
| 3.3 Lösung symmetrisch-definiten Gleichungen . . . . . | 63 |
| 3.31 Anwendung auf die Rechentechnik . . . . .         | 66 |
| 3.4 Orthogonalität . . . . .                           | 67 |

## 8 Inhalt

### 4 Nichtlineare Algebra

|   |     |
|---|-----|
| 4.1 Linearisierung . . . . .  | 69  |
| 4.11 Übungen im Linearisieren . . . . .                             | 72  |
| 4.12 Funktionen mehrerer Variablen . . . . .                        | 73  |
| 4.2 Die Korrekturmethode von Newton . . . . .                       | 74  |
| 4.3 Rekursionsformeln, Konvergenz . . . . .                         | 77  |
| 4.31 Rekursionen im Gebiete mehrerer Variablen . . . . .            | 80  |
| 4.4 Newtonsche Methode für mehrere Unbekannte . . . . .             | 81  |
| 4.41 Definite nichtlineare Probleme . . . . .                       | 83  |
| 4.5 Polynome . . . . .  | 84  |
| 4.51 Das Rechenschema von Horner . . . . .                          | 85  |
| 4.52 Eigenschaften der Nullstellen . . . . .                        | 87  |
| 4.53 Division durch ein quadratisches Polynom . . . . .             | 88  |
| 4.54 Lösung algebraischer Gleichungen . . . . .                     | 89  |
| 4.6 Direkte Methoden zur Lösung algebraischer Gleichungen . . . . . | 92  |
| 4.61 Die Methode von Bernoulli . . . . .                            | 93  |
| 4.62 Konvergenzverbesserungen . . . . .                             | 97  |
| 4.63 Komplexe Pole . . . . .  | 98  |
| 4.64 Der Rhomben-Algorithmus . . . . .                              | 98  |
| 4.65 Dominante Wurzel, Stabilität . . . . .                         | 100 |

### 5 Eigenwertprobleme

|  |     |
|--|-----|
| 5.1 Ein Einführungsbeispiel . . . . .                          | 101 |
| 5.2 Das charakteristische Polynom . . . . .                    | 102 |
| 5.21 Algorithmus für das charakteristische Polynom . . . . .   | 105 |
| 5.22 Ausnahmefälle . . . . .                                   | 107 |
| 5.23 Symmetrische Eigenwertprobleme . . . . .                  | 108 |
| 5.24 Der Kreisesatz von Gerschgorin . . . . .                  | 109 |
| 5.3 Allgemeines Eigenwertproblem, iterative Methoden . . . . . | 109 |
| 5.31 Der symmetrische Fall . . . . .                           | 114 |
| 5.32 Beispiel zur Iterationsmethode . . . . .                  | 115 |
| 5.4 Ausblicke . . . . .  | 118 |
| 5.41 Lineare Schwinger . . . . .                               | 119 |

### 6 Differentialgleichungen

|  |     |
|--|-----|
| 6.1 Numerische Differentiation . . . . .           | 123 |
| 6.11 Weitere Formeln zur Differentiation . . . . . | 127 |
| 6.2 Numerische Integration . . . . .               | 128 |
| 6.21 Trapezregel . . . . .                         | 128 |
| 6.22 Fortgesetzte Halbierung . . . . .             | 131 |
| 6.23 Ergänzungen zur Integrationstheorie . . . . . | 136 |
| 6.24 Periodische Funktionen . . . . .              | 137 |

|   |  |     |
|---|--|-----|
| 6.3   | Differentialgleichung 1. Ordnung . . . . .                               | 138 |
| 6.31  | Nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung . . . . .                  | 141 |
| 6.32  | Methode von Heun . . . . .   | 142 |
| 6.33  | Methoden von Runge-Kutta . . . . .                                       | 143 |
| 6.34  | Methode von Adams . . . . .  | 146 |
| 6.4   | Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .                 | 148 |
| 6.41  | Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .                        | 149 |
| 6.42  | Singularitäten . . . . .   | 150 |
| 6.43  | Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .                   | 153 |
| 6.44  | Einiges über numerische Stabilität . . . . .                             | 154 |
| 6.45  | Die Methode des stärksten Abstiegs . . . . .                             | 159 |
| 6.5   | Randwertaufgaben . . . . .   | 164 |
| 6.51  | Methode der Partikulärlösungen . . . . .                                 | 165 |
| 6.52  | Methode der Diskretisation . . . . .                                     | 169 |
| 6.6   | Partielle Differentialgleichungen . . . . .                              | 175 |
| 6.61  | Parabolische Gleichungen . . . . .                                       | 176 |
| 6.62  | Elliptische Randwertprobleme . . . . .                                   | 180 |
| 6.63  | Krummer Rand . . . . .   | 185 |
| <br><b>7 Approximationen</b>                          |  |     |
| 7.1   | Das Stützpolynom . . . . .   | 187 |
| 7.11  | Rechentchnik für die Lagrange-Formel . . . . .                           | 190 |
| 7.12  | Anwendung auf die numerische Differentiation und Interpolation . . . . . | 193 |
| 7.2   | Systeme von Polynomen . . . . .  | 199 |
| 7.21  | Tschebyscheff-Polynome . . . . .   | 199 |
| 7.22  | Approximation durch Tschebyscheff-Entwicklung . . . . .                  | 202 |
| 7.23  | Entwicklung des Stützpolynoms . . . . .                                  | 205 |
| 7.3   | Stützprobleme im Komplexen . . . . .                                     | 207 |
| 7.31  | Realitätsverhältnisse . . . . .  | 210 |
| 7.32  | Harmonische Analyse (Fourier-Analyse) . . . . .                          | 212 |
| 7.33  | Anwendung auf die Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen . . . . .     | 214 |
| <br><b>8 Spline-Interpolation (von H.-R. Schwarz)</b> |  |     |
| 8.1   | Charakterisierung der Spline-Funktion . . . . .                          | 216 |
| 8.11  | Die Eigenschaften der Spline-Funktion . . . . .                          | 217 |
| 8.12  | Verallgemeinerungen . . . . .  | 218 |
| 8.2   | Kubische Spline-Interpolation . . . . .                                  | 219 |
| 8.21  | Zweite Ableitungen als Unbekannte . . . . .                              | 220 |
| 8.22  | Zur Lösung der tridiagonalen Gleichungssysteme . . . . .                 | 222 |
| 8.23  | Beispiel . . . . .   | 224 |

## 10 Inhalt

|  |     |
|--|-----|
| 8.3 Ergänzungen . . . . .                                | 225 |
| 8.31 Allgemeine kubische Spline-Interpolation . . . . .  | 225 |
| 8.32 Glatte zweidimensionale Kurvendarstellung . . . . . | 227 |

## 9 Die Methode der finiten Elemente (von H.-R. Schwarz)

|  |     |
|--|-----|
| 9.1 Grundlagen . . . . .                                     | 229 |
| 9.2 Die Grundidee der Methode der finiten Elemente . . . . . | 231 |
| 9.3 Die Elementmatrizen . . . . .                            | 232 |
| 9.4 Aufstellung des linearen Gleichungssystems . . . . .     | 238 |
| 9.5 Beispiel . . . . .                                       | 238 |

## Anhang I Rechenbeispiele

|   |     |
|---|-----|
| 1 Inversion einer 4reihigen Matrix . . . . .  | 241 |
| 2 Vier lineare Gleichungen. Gauß-Algorithmus . . . . .  | 242 |
| 3 Vier Gleichungen, konzentrierter Gauß-Algorithmus . . . . .   | 243 |
| 4 Methode von Bernoulli, kubische Gleichung . . . . .   | 243 |
| 5 Methode von Bernoulli, kubische Gleichung (komplexe Wurzeln) . . . . .                                    | 244 |
| 6 Rhomben-Algorithmus . . . . .   | 244 |
| 7 Berechnung eines charakteristischen Polynoms und eines zugehörigen Eigenwertes samt Eigenvektor . . . . . | 245 |
| 8 Numerische Integration . . . . .  | 246 |
| 9 Methode von Runge-Kutta . . . . .   | 246 |

## Anhang II Tabellen

|   |     |
|---|-----|
| 1 Numerische Differentiation . . . . .  | 248 |
| 2 Numerische Integration . . . . .  | 249 |
| 3 Stützkoeffizienten . . . . .  | 249 |
| 4 Harmonische Analyse, 12 Stützwerte . . . . .  | 250 |
| 5 Ergänzung einer Analyse mit 12 Stützwerten zu einer Analyse mit 24 Stützwerten . . . . .          | 251 |
| 6 Harmonische Synthese, 12 Stützwerte . . . . .   | 252 |
| 7 Harmonische Synthese, 24 Stützwerte . . . . .   | 253 |
| 8 Nomogramm für die kubische Interpolation und die Bildung der quadratischen Verbesserung . . . . . | 254 |
| 9 Tschebyscheff-Polynome . . . . .  | 255 |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| Anhang III Aufgaben . . . . . | 256 |
|-------------------------------|-----|

|   |     |
|---|-----|
| Anhang IV Anleitungen zur Lösung der Aufgaben . . . . . | 266 |
|---|-----|

|                     |     |
|---------------------|-----|
| Literatur . . . . . | 286 |
|---------------------|-----|

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| Sachverzeichnis . . . . . | 289 |
|---------------------------|-----|