

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung. Hilfsmittel</b>		Seite
Bemerkungen zum Zahlenrechnen . . . . .		2
Zum Rechenschieber . . . . .		2
Zur Rechenmaschine . . . . .		4
Formelsprache ALGOL . . . . .		5

## I. Kapitel

### Gleichungen

§ 1 Allgemeine Gleichungen mit einer Unbekannten . . . . .	12
1.1 Einführung . . . . .	12
1.2 Graphische Näherungslösung . . . . .	15
1.3 Verbesserung nach NEWTON . . . . .	18
1.4 NEWTON-Verbesserung höherer Ordnung . . . . .	20
1.5 Lineare und quadratische Interpolation . . . . .	21
1.6 Iteration . . . . .	24
1.7 Konvergenzfragen. Lineare und quadratische Konvergenz . . . . .	28
1.8 Konvergenzbeschleunigung bei linearer Konvergenz. . . . .	32
1.9 Regula falsi mit fastquadratischer Konvergenz. . . . .	35
1.10 Komplexe Wurzeln . . . . .	37
1.11 System zweier Gleichungen für zwei Unbekannte . . . . .	40
§ 2 Algebraische Gleichungen: HORNER-Schema . . . . .	43
2.1 Überblick. Allgemeine Eigenschaften . . . . .	43
2.2 Das HORNER-Schema. . . . .	46
2.3 Das vollständige HORNER-Schema . . . . .	49
2.4 NEWTONSche Wurzelverbesserung . . . . .	51
2.5 Automatische Durchführung bei nur reellen Wurzeln . . . . .	56
2.6 Kubische Gleichung . . . . .	57
2.7 Gleichung 4. Grades . . . . .	60
2.8 Das doppelzeilige HORNER-Schema . . . . .	66
2.9 Das BAIRSTOW-Verfahren . . . . .	70
§ 3 Algebraische Gleichungen: Verfahren von GRAEFFE . . . . .	72
3.1 Prinzip und Rechenschema des GRAEFFE-Verfahrens. . . . .	72
3.2 GRAEFFE-Verfahren bei reellen Wurzeln . . . . .	75
3.3 Ein Beispiel . . . . .	79
3.4 GRAEFFE-Verfahren bei komplexen Wurzeln . . . . .	81
3.5 Bestimmung komplexer Wurzeln nach BRODETSKY-SMEAL . . . . .	83
3.6 Beispiel zu BRODETSKY-SMEAL . . . . .	89

§ 4 Stabilitätskriterien. Verfahren des ROUTH-Kriteriums . . . . .	91
4.1 Fragestellung . . . . .	91
4.2 Die SRURMSche Kette . . . . .	92
4.3 Ortskurvenkriterium . . . . .	95
4.4 Das ROUTH-Kriterium . . . . .	98
4.5 Verallgemeinertes ROUTH-Kriterium . . . . .	101
4.6 Verfahren von COLLATZ. . . . .	103

## II. Kapitel

### Lineare Gleichungen und Matrizen

§ 5 Der GAUSSsche Algorithmus . . . . .	106
5.1 Prinzip des Algorithmus . . . . .	106
5.2 Der verkettete Algorithmus . . . . .	112
5.3 Zeilenvertauschung bei $b_{ii} = 0$ . . . . .	118
5.4 Symmetrische Koeffizientenmatrix . . . . .	121
5.5 Allgemeine homogene Gleichungssysteme . . . . .	124
5.6 Allgemeine inhomogene Gleichungen . . . . .	129
§ 6 Matrizen . . . . .	132
6.1 Allgemeine Definitionen und Begriffe . . . . .	132
6.2 Matrizenmultiplikation . . . . .	135
6.3 Sätze über Matrizenmultiplikation . . . . .	139
6.4 Sonderfälle von Matrizenprodukten . . . . .	140
6.5 Quadratische Formen. . . . .	143
6.6 Der verkettete Algorithmus als Matrizenoperation . . . . .	144
§ 7 Die Kehrmatrix. . . . .	145
7.1 Begriff und Herleitung der Kehrmatrix . . . . .	145
7.2 Berechnung der Kehrmatrix . . . . .	149
7.3 Matrizendivision . . . . .	152
7.4 Kehrmatrix bei symmetrischer Matrix . . . . .	154
7.5 Ähnlichkeitstransformation . . . . .	156
§ 8 Iterative Behandlung linearer Gleichungssysteme . . . . .	157
8.1 Das GAUSS-SEIDELsche Iterationsverfahren . . . . .	157
8.2 Konvergenz des Verfahrens . . . . .	159
8.3 Ein Beispiel . . . . .	161
8.4 Weitere Iterationsverfahren . . . . .	162
8.5 Nachträgliche Korrekturen . . . . .	163
§ 9 Das Eigenwertproblem . . . . .	165
9.1 Aufgabenstellung. . . . .	165
9.2 Das System der Eigenvektoren . . . . .	167
9.3 Entwicklungssatz. Iterierte Vektoren. . . . .	169
9.4 Überblick über Lösungsmethoden . . . . .	175
9.5 Die allgemeine Eigenwertaufgabe . . . . .	177
§ 10 Eigenwertaufgabe: Iterative Methoden . . . . .	178
10.1 Das v. MISERESsche Iterationsverfahren . . . . .	178
10.2 Betragsgleiche und betragснаhe Eigenwerte . . . . .	181
10.3 Der RAYLEIGH-Quotient und seine Verallgemeinerungen . . . . .	183
10.4 Automatenrechnung. Programme . . . . .	191

10.5 Transformation der Eigenwerte. Gebrochene Iteration . . . . .	193
10.6 Gebrochene Iteration nach WIELANDT . . . . .	196
10.7 Bestimmung höherer Eigenwerte: Verfahren von KOCH . . . . .	200

## III. Kapitel

## Interpolation und Integration

§ 11 Allgemeine Interpolationsformeln . . . . .	204
11.1 Aufgabenstellung . . . . .	204
11.2 Unmittelbarer Polynomansatz . . . . .	205
11.3 LAGRANGESche Interpolationsformel . . . . .	207
11.4 NEWTONSche Interpolationsformel . . . . .	210
11.5 Steigungen, Ableitungen und Restglied . . . . .	215
11.6 HERMITESche Interpolation . . . . .	217
§ 12 Spezielle Interpolationsformeln . . . . .	217
12.1 Das Differenzschema . . . . .	217
12.2 Interpolationsformeln von GREGORY-NEWTON . . . . .	222
12.3 Interpolationsformeln von GAUSS . . . . .	224
12.4 Formel von EVERETT-LAPLACE . . . . .	225
12.5 Formeln von STIRLING und BESSEL . . . . .	228
§ 13 Numerische Integration . . . . .	229
13.1 Mittelwertformeln . . . . .	229
13.2 Trapez- und SIMPSON-Regel . . . . .	231
13.3 Andere Herleitung der SIMPSON-Regel . . . . .	234
13.4 Die $\frac{3}{8}$ -Regel. Kombination mit der SIMPSON-Regel . . . . .	236
13.5 Allgemeine Mittelwertformeln. Restglied. Fehlerschätzung . . . . .	238
13.6 Quadraturformeln von GAUSS . . . . .	242
13.7 Differenzenformeln . . . . .	244
13.8 Verwendung von Ableitungen . . . . .	247
13.9 Beispiele . . . . .	251
13.10 Mehrfache Integration . . . . .	252
§ 14 Graphische Integration . . . . .	256
14.1 Einfache Integration . . . . .	256
14.2 Maßstabsfragen . . . . .	258
14.3 Ein Beispiel . . . . .	259

## IV. Kapitel

## Statistik und Ausgleichsrechnung

§ 15 Verteilung der Grundgesamtheit . . . . .	260
15.1 Zufallsexperiment und Zufallsereignis . . . . .	260
15.2 Wahrscheinlichkeit . . . . .	261
15.3 Stochastische Unabhängigkeit . . . . .	264
15.4 Stochastische Veränderliche. Verteilung . . . . .	266
15.5 Die Verteilungsfunktion . . . . .	270
15.6 Mittelwert und Streuung . . . . .	273
15.7 Mittelwert und Streuung mehrerer Variabler . . . . .	276
§ 16 Die Stichprobe . . . . .	277
16.1 Stichprobenmittel und Stichprobenstreuung . . . . .	277
16.2 Praktische Berechnung von $\bar{x}$ und $s^2$ . . . . .	281
16.3 Prüfen auf Normalverteilung: Wahrscheinlichkeitspapier . . . . .	284

	Seite
§ 17 Die Stichprobenverteilungen . . . . .	287
17.1 Verteilung des Stichprobenmittels: Vertrauensgrenzen für $\mu$ . . . . .	288
17.2 Die $t$ -Verteilung: Vertrauensgrenzen für $\mu$ . . . . .	289
17.3 Verteilung von $s^2$ : Die $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	292
§ 18 Statistische Prüfverfahren . . . . .	296
18.1 Vorgehensweise, Fehler erster und zweiter Art . . . . .	296
18.2 Prüfgrößen . . . . .	298
18.3 Prüfen auf Mittelwert . . . . .	299
18.4 Vergleich zweier Mittelwerte . . . . .	301
18.5 Prüfen auf Streuung, Kontrollkarten . . . . .	304
18.6 Der $\chi^2$ -Test . . . . .	306
18.7 Zweiseitiges Risiko . . . . .	307
§ 19 Ausgleichsrechnung: Direkte Beobachtungen . . . . .	312
19.1 Ausgleich direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit . . . . .	313
19.2 Direkte Beobachtungen ungleicher Genauigkeit . . . . .	318
19.3 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz . . . . .	320
§ 20 Ausgleich vermittelnder Beobachtungen . . . . .	323
20.1 Die Fehlergleichungen . . . . .	323
20.2 Die Normalgleichungen . . . . .	326
20.3 Mittelwert und Streuung der Unbekannten . . . . .	329
20.4 Mittlere Fehler und Vertrauensgrenzen . . . . .	332
20.5 Beobachtungen ungleicher Genauigkeit . . . . .	335
§ 21 Ausgleichsparabeln . . . . .	336
21.1 Aufgabenstellung, Normalgleichungen . . . . .	336
21.2 Ein Beispiel . . . . .	340
21.3 Gleichabständige Funktionswerte . . . . .	342
21.4 Numerisches Differenzieren . . . . .	343
21.5 Glätten von Beobachtungswerten . . . . .	344

## V. Kapitel

## Approximation

§ 22 Mittlere Approximation . . . . .	345
22.1 Allgemeine Approximationsaufgabe, Überblick . . . . .	345
22.2 Allgemeine Form der Normalgleichungen . . . . .	348
22.3 Approximation durch Polynome . . . . .	349
22.4 Orthogonalsysteme . . . . .	351
22.5 Orthogonalisierungsverfahren . . . . .	354
22.6 LEGENDRESche Kugelfunktionen . . . . .	355
§ 23 Harmonische Analyse . . . . .	357
23.1 Aufgabenstellung, Die FOURIER-Koeffizienten . . . . .	357
23.2 Numerische Bestimmung der FOURIER-Koeffizienten (Schema- verfahren) . . . . .	360
23.3 Verfahren von RUNGE und ZIPPERER . . . . .	364
§ 24 Gleichmäßige Polynomapproximation . . . . .	370
24.1 Die Aufgabe . . . . .	370
24.2 Transformation auf periodische Funktion . . . . .	372
24.3 $T$ -Polynome . . . . .	375

	Seite
24.4 Angenähert gleichmäßige Approximation . . . . .	376
24.5 Vorgehen bei symmetrischer Funktion $f(x)$ . . . . .	378
24.6 Beispiele . . . . .	379

## VI. Kapitel

**Differentialgleichungen: Anfangswertaufgaben**

§ 25 Grundgedanken. Zeichnerische Verfahren . . . . .	380
25.1 Allgemeine Bemerkungen . . . . .	380
25.2 Differentialgleichung erster Ordnung. Richtungsfeld, Isoklinen . . . . .	382
25.3 EULER-CAUCHYScher Streckenzug . . . . .	388
25.4 Genauigkeitsverhältnisse . . . . .	389
25.5 Trapezregel. Iteration . . . . .	392
25.6 Differentialgleichung zweiter Ordnung . . . . .	394
§ 26 Differenzenverfahren . . . . .	398
26.1 Die SIMPSON-Regel . . . . .	398
26.2 Numerische Stabilität . . . . .	401
26.3 Numerisch stabile Integrationsformeln . . . . .	404
26.4 Die Anlaufrechnung . . . . .	406
26.5 Integrationsformeln mit Ableitungen. Systeme . . . . .	409
26.6 Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung . . . . .	411
§ 27 Das RUNGE-KUTTA-Verfahren . . . . .	417
27.1 Verfahren für Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	417
27.2 Genauigkeitsordnung, Schrittweite . . . . .	420
27.3 Differentialgleichungen zweiter Ordnung: NYSTRÖM-Verfahren . . . . .	425
27.4 Systeme von Differentialgleichungen . . . . .	430
27.5 Schrittbemessung . . . . .	433

## VII. Kapitel

**Differentialgleichungen: Rand- und Eigenwertaufgaben**

§ 28 Einführung . . . . .	435
28.1 Aufgabenstellung: Einfache Beispiele . . . . .	435
28.2 Lineare Randwertaufgaben . . . . .	438
28.3 Das Eigenwertproblem . . . . .	440
28.4 Beispiele für lineare Randwertaufgaben . . . . .	443
28.5 Beispiele linearer Eigenwertaufgaben . . . . .	445
§ 29 Behandlung als Anfangswertaufgabe. . . . .	449
29.1 Lineare Randwertaufgaben . . . . .	449
29.2 Lineare Eigenwertaufgaben . . . . .	452
29.3 Übertragungsmatrizen . . . . .	456
29.4 Berechnung der $\mathbf{Y}_k$ durch Reihenentwicklung . . . . .	461
29.5 Berechnung von $\mathbf{Y}$ nach RUNGE-KUTTA . . . . .	462
29.6 Zwischenbedingungen . . . . .	464
§ 30 Differenzenverfahren . . . . .	468
30.1 Prinzip. Herleitung verbesserter Differenzenformeln . . . . .	468
30.2 Ein Beispiel . . . . .	470
30.3 Randformeln . . . . .	472
30.4 Numerische Durchführung . . . . .	473

	Seite
30.5 Längs- und Biegeschwingungen . . . . .	476
30.6 Allgemeine Mehrstellenausdrücke nach FALK . . . . .	478
§ 31 Verfahren von RAYLEIGH-RITZ . . . . .	482
31.1 Das RAYLEIGHsche Prinzip . . . . .	482
31.2 RAYLEIGH-Quotient als Näherung für $\lambda_1$ . . . . .	487
31.3 Eigenwert in den Randbedingungen . . . . .	489
31.4 Das RITZsche Verfahren . . . . .	491
31.5 Beispiele zum RITZ-Verfahren . . . . .	495
§ 32 Schematisierung des RITZ-Verfahrens . . . . .	499
32.1 Grundgedanken, Bezeichnungen . . . . .	499
32.2 Die Feldverformung . . . . .	501
32.3 Feldausdrücke und Feldmatrizen . . . . .	502
32.4 Aufbau der Systemmatrizen . . . . .	504
32.5 Beispiel . . . . .	505
32.6 Automatischer Matrizenaufbau . . . . .	507
32.7 Veränderliche Koeffizienten . . . . .	508
32.8 Numerische Durchführung. Höhere Eigenwerte . . . . .	511
§ 33 Ergänzungen zum RAYLEIGH-RITZ-Verfahren . . . . .	515
33.1 RAYLEIGH-Quotient aus der Differentialgleichung . . . . .	515
33.2 Das RITZsche Verfahren mit $R^*[u]$ . . . . .	521
33.3 Die GALERKINSchen Gleichungen . . . . .	522
33.4 Verfahren von GRAMMEL . . . . .	524
33.5 Herleitung der Differentialgleichung aus der Extremalforderung . . . . .	529
33.6 Orthogonalität, Entwicklung, Minimaleigenschaften . . . . .	532
33.7 Eigenschaften der RITZ-Näherungen . . . . .	537
§ 34 Verfahren der schrittweisen Näherung (Iteration) . . . . .	540
34.1 Allgemeiner Gang des Verfahrens . . . . .	540
34.2 Numerische Integration . . . . .	542
34.3 Beispiele . . . . .	544
34.4 Konvergenz des Verfahrens . . . . .	549
34.5 Die SCHWARZschen Konstanten und Quotienten . . . . .	552
34.6 Berechnung der höheren Eigenwerte . . . . .	553
<b>Namen- und Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>555</b>