# Inhalt


**I Berechnung von Funktionen und Nullstellen** . . . 11

**1. Berechnung von Funktionen** . . . 11
1.1. Polynome . . . 12
1.2. Unendliche Reihen . . . 14
1.2.1. Fehlerabschätzung zum Leibnizschen Kriterium . . . 14
1.2.2. Fehlerabschätzung zum Quotientenkriterium . . . 16
1.3. Asymptotische Entwicklungen . . . 17
1.4. Kettenbruchentwicklungen . . . 20
1.5. Beste Approximationen . . . 21
1.6. Numerische Übungsaufgaben . . . 26

**2. Berechnung von Nullstellen** . . . 29
2.1. Intervallschachtelungsverfahren . . . 30
2.2. Methode der sukzessiven Approximation . . . 32
2.2.1. Bestimmung von Fixpunkten . . . 32
2.2.2. Bestimmung von Nullstellen . . . 36
2.3. Das Newtonsche Verfahren . . . 38
2.4. Regula falsi . . . 41
2.5. Quadratische Interpolation . . . 44
2.6. Numerische Übungsaufgaben . . . 46

**II Interpolation, Extrapolation, numerische Differentiation und numerische Integration** . . . 48

**3. Interpolation, Extrapolation und numerische Differentiation** . . . 49
3.1. Interpolationspolynome . . . 49
3.1.1. Lagrange-Darstellung . . . 49
3.1.2. Dividierte Differenzen und Newtonsche Darstellung . . . 51
3.2. Interpolation von Funktionen . . . 54
3.2.1. Die Hermitesche Formel . . . 55
3.2.2. Restglieder . . . 58
3.2.3. Äquidistante Stützstellen . . . 59
3.3. Numerische Differentiation . . . 61
3.3.1. Elementare Differenzenquotienten . . . 62
3.3.2. Differenzenquotienten beliebiger Ordnung und Genauigkeit . . . 63
3.4. Numerische Übungsaufgaben . . . 66

**4. Numerische Integration** . . . 70
4.1. Interpolatorische Quadraturformeln . . . 70
4.1.1. Quadraturformeln und Restglieder . . . 70
4.1.2. Spezielle Quadraturformeln . . . 73
4.2. Summierte Quadraturformeln . . . 78
4.2.1. Spezielle summierte Quadraturformeln und Restglieder . . . 79
4.2.2. Extrapolationsverfahren und Romberg-Integration . . . 82
4.3. Gaußsche Quadraturformeln . . . 84
4.4. Numerische Übungsaufgaben . . . 88

**III Numerische Methoden der linearen Algebra** . . . . . 91

**5. Der normierte Zahlenraum** . . . . . 92
5.1. Normen . . . . . 92
5.2. Matrizennormen. . . . . 96
5.3. Skalarprodukte . . . . . 99
5.4. Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen. . . . . 102
5.4.1. Allgemeine Matrizen . . . . . 102
5.4.2. Symmetrische Matrizen und Abbildungen. . . . . 105

**6. Eliminationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme** . . . . . 110
6.1. Das Gaußsche Eliminationsverfahren . . . . . 111
6.1.1. Vorwärtselimination und Rückwärtseinsetzen. . . . . 111
6.1.2. Dreieckszerlegung. . . . . 114
6.1.3. Simultane Lösung linearer Gleichungssysteme, Invertierung von Matrizen 117
6.1.4. Fehlerabschätzung und Nachiteration . . . . . 118
6.2. Spezielle Klassen linearer Gleichungssysteme . . . . . 119
6.2.1. Positiv definite Koeffizientenmatrizen, $LDL^*$-Zerlegung, Cholesky-Verfahren. . . . . 119
6.2.2. Diagonaldominante Koeffizientenmatrizen, $M$-Matrizen . . . . . 122
6.2.3. Bandmatrizen . . . . . 127
6.2.4. Tridiagonale Gleichungssysteme . . . . . 128
6.3. Numerische Übungsaufgaben . . . . . 129

**7. Orthogonalisierungsverfahren und überbestimmte Gleichungssysteme** . . . . . 133
7.1. Orthogonalisierungsverfahren . . . . . 133
7.2. Überbestimmte Gleichungssysteme. . . . . 137
7.3. Ausgleichsparabeln und diskrete harmonische Analyse . . . . . 140
7.3.1. Formulierung und Lösung der allgemeinen Aufgabe . . . . . 140
7.3.2. Ausgleichsparabeln . . . . . 141
7.3.3. Diskrete harmonische Analyse . . . . . 142
7.4. Orthogonale Polynome. . . . . 144
7.4.1. Definition orthogonaler Polynome . . . . . 144
7.4.2. Symmetrische orthogonale Polynome. . . . . 146
7.4.3. Beispiele. . . . . 149
7.5. Numerische Übungsaufgaben . . . . . 151

**8. Iterative Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme** . . . . . 155
8.1. Das Verfahren von Jacobi oder Gesamtschrittverfahren. . . . . 155
8.1.1. Definition des Verfahrens. . . . . 155
8.1.2. Konvergenz und Fehlerabschätzungen . . . . . 156
8.1.3. Spezielle Konvergenzkriterien. . . . . 158
8.2. Das Verfahren von Gauß-Seidel oder Einzelschrittverfahren . . . . . 159
8.2.1. Definition des Verfahrens. . . . . 159
8.2.2. Starkes und schwaches Zeilensummenkriterium. . . . . 160
8.3. Gleichungssysteme mit positiv definiten Matrizen . . . . . 164
8.3.1. Das Verfahren von Jacobi oder Gesamtschrittverfahren . . . . . 164
8.3.2. Das Verfahren von Gauß-Seidel oder Einzelschrittverfahren . . . . . 166
8.4. Iterative Methoden zur Invertierung von Matrizen . . . . . 169
8.4.1. Die Neumannsche Reihe . . . . . 169
8.4.2. Iterationsverfahren zur Invertierung von Matrizen . . . . . 171
8.4.3. Das Newtonsche Verfahren zur Invertierung von Matrizen. . . . . 172
8.5. Numerische Übungsaufgaben . . . . . 173

**IV Nichtlineare Gleichungssysteme und Eigenwertaufgaben bei Matrizen** 176

**9. Iterative Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme** . . . . . 177
9.1. Methode der sukzessiven Approximation . . . . . 177
9.1.1. Definition des Verfahrens . . . . . 178
9.1.2. Kontrahierende Abbildungen . . . . . 179
9.1.3. Das Verfahren von Gauß-Seidel oder Einzelschrittverfahren . . . . . 183
9.2. Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme . . . . . 185
9.2.1. Allgemeine Abbildungen . . . . . 185
9.2.2. Monotone Abbildungen . . . . . 189
9.3. Newtonsche Verfahren . . . . . 192
9.3.1. Definition der Verfahren . . . . . 192
9.3.2. Konvergenz der Newtonschen Verfahren . . . . . 194
9.4. Numerische Übungsaufgaben . . . . . 197

**10. Eigenwertaufgaben bei Matrizen** . . . . . 200
10.1. Die Potenzmethode . . . . . 200
10.1.1. Symmetrische Abbildungen mit nichtnegativen Eigenwerten . . . . . 201
10.1.2. Symmetrische Abbildungen . . . . . 204
10.1.3. Inverse Iteration und Spektralverschiebung . . . . . 210
10.2. Jacobische Verfahren . . . . . 212
10.2.1. Elementare orthogonale Transformationen . . . . . 213
10.2.2. Das klassische Jacobische Verfahren . . . . . 215
10.2.3. Zyklische und andere Jacobische Verfahren . . . . . 217
10.3. Das Verfahren der iterierten Vektoren von Krylow . . . . . 218
10.3.1. Minimalpolynom eines Vektors . . . . . 219
10.3.2. Symmetrische Jacobi-Matrix und Sturmsche Kette . . . . . 222
10.4. Einschließungssätze und Fehlerabschätzungen für symmetrische Eigenwertaufgaben . . . . . 228
10.5. Numerische Übungsaufgaben . . . . . 233

**V Numerische Integration von Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen** . . . . . 239

**11. Einschrittverfahren für Anfangswertaufgaben** . . . . . 240
11.1. Definition des Verfahrens . . . . . 241
11.2. Konsistenz . . . . . 244
11.2.1. Konsistenzbedingungen . . . . . 245
11.2.2. Konsistenz der Euler-Cauchy-Verfahren . . . . . 247
11.2.3. Das Runge-Kutta-Verfahren . . . . . 249
11.2.4. Die Methode der Taylor-Entwicklung . . . . . 254
11.3. Konvergenz . . . . . 256
11.3.1. Der allgemeine Konvergenzsatz . . . . . 256
11.3.2. Konvergenz spezieller Verfahren . . . . . 259
11.4. Stabilität . . . . . 261
11.4.1. Allgemeiner Stabilitätssatz . . . . . 262
11.4.2. Diskretisierungs- und Rundungsfehler . . . . . 264
11.5. Numerische Übungsaufgaben . . . . . 266

**12. Mehrschrittverfahren für Anfangswertaufgaben** . . . . . 270
12.1. Definition des Verfahrens . . . . . 270
12.2. Konsistenz . . . . . 273
12.2.1. Konsistenzbedingungen . . . . . 273
12.2.2. Verfahren von Adams . . . . . 274
12.2.3. Verfahren von Nyström und Milne . . . . . 281
12.2.4. Verfahren von Störmer und Cowell für spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . . 284
12.3. Konvergenz . . . . . 288
12.3.1. Der allgemeine Konvergenzsatz . . . . . 288
12.3.2. Konvergenz spezieller Verfahren . . . . . 292
12.4. Numerische Übungsaufgaben . . . . . 295

**VI Fehleranalyse numerischer Algorithmen** . . . . . 298

**13. Grundlagen der Fehleranalyse** . . . . . 299
13.1. Auswertungsalgorithmen in Gleitpunktarithmetik . . . . . 299
13.1.1. Zahldarstellungen und Rundungsfunktionen . . . . . 300
13.1.2. Gleitpunktarithmetik . . . . . 302
13.1.3. Auswertungsalgorithmen . . . . . 303
13.2. Fehlerfortpflanzung . . . . . 305
13.2.1. Fehlerbeziehungen . . . . . 306
13.2.2. Lineare Fehlergleichungen und Konditionszahlen . . . . . 311
13.2.3. Restgliedabschätzungen . . . . . 314
13.3. Daten- und Rundungskonditionszahlen, Rückwärtsstabilitätskonstanten . . . 317

**14. Anwendungen und Beispiele** . . . . . 321
14.1. Berechnung von Wurzeln quadratischer Gleichungen, von Produkten und Summen . . . . . 322
14.1.1. Wurzeln quadratischer Gleichungen . . . . . 322
14.1.2. Rekursive Berechnung von Produkten . . . . . 326
14.1.3. Rekursive Berechnung von Summen . . . . . 328
14.2. Der elementare Einschrittalgorithmus . . . . . 331
14.2.1. Definition des Algorithmus und lineare Fehlergleichungen . . . . . 331
14.2.2 Horner-Schema . . . . . 333
14.2.3. Lösung bidiagonaler Gleichungssysteme . . . . . 335
14.2.4. Auswertung von Kettenbrüchen . . . . . 336
14.3. Gaußsches Eliminationsverfahren . . . . . 338
14.3.1. Datenstörungen . . . . . 338
14.3.2. Lösung gestaffelter Gleichungssysteme . . . . . 341
14.3.3. Gaußsches Eliminationsverfahren unter Rundungsfehlerstörungen . . 344
14.3.4. Residuenabschätzungen und Stabilitätsbedingungen . . . . . 348

**Literatur** . . . . . 355

**Sachverzeichnis** . . . . . 360