

INHALT

0.	Einführung	13
0.1.	Der Gegenstand der numerischen Mathematik	13
0.2.	Methoden und Aufgaben der numerischen Mathematik	14
0.2.1.	Metrische Funktionenräume	14
0.2.2.	Funktionen, die auf Funktionenräumen definiert sind	16
0.2.3.	Die Methoden der numerischen Mathematik	16
0.3.	Die Hilfsmittel der numerischen Mathematik und ihr Einfluß auf die Entwicklung der numerischen Mathematik	19
0.4.	Numerische Verfahren als Teil der numerischen Mathematik. Kurze Inhaltsangabe des Buches	23
1.	Die Fehler im Resultat einer numerischen Lösung	25
1.1.	Quellen und Klassifizierung der Fehler	25
1.2.	Der numerische Fehler	28
1.3.	Der eingangsbedingte Fehler	32
1.3.1.	Der absolute und der relative Fehler einer Zahl	32
1.3.2.	Sichere Ziffern	34
1.3.3.	Der eingangsbedingte Fehler des Funktionswertes für näherungsweise Argumentwerte. Die Fehler im Ergebnis arithmetischer Operationen	36
1.4.	Übungen	44
2.	Die Theorie der Interpolation und einige ihrer Anwendungen	45
2.1.	Aufgabenstellung	45
2.1.1.	Der lineare Raum. Linear unabhängige Systeme von Elementen	46
2.1.2.	Die Interpolationsaufgabe	47
2.2.	Das Interpolationspolynom von LAGRANGE	53
2.2.1.	Die Konstruktion des Interpolationspolynoms von LAGRANGE	53
2.2.2.	Das Interpolationspolynom von LAGRANGE für äquidistante Stützstellen	54
2.2.3.	Das Interpolationsschema von AITKEN	55
2.3.	Die Fehler der Interpolationsformel von LAGRANGE	57
2.3.1.	Das Restglied der Formel von LAGRANGE	57
2.3.2.	Zur Wahl der Interpolationsstützstellen	58
2.3.3.	Der eingangsbedingte Fehler der Formel von LAGRANGE	63
2.4.	Das Restglied der allgemeinen Interpolationsformel	64

2.5.	Die Interpolationsformel von NEWTON für beliebige Stützstellenverteilungen	68
2.5.1.	Die Steigungen und ihre Eigenschaften	69
2.5.2.	Die Herleitung der Formel von NEWTON für beliebige Stützstellenverteilungen	72
2.5.3.	Das Restglied der Formel von NEWTON	74
2.6.	Die Interpolationsformel von NEWTON für äquidistante Stützstellen	76
2.6.1.	Die Differenzen und ihre Eigenschaften	77
2.6.2.	Die Herleitung der Formel von NEWTON	81
2.6.3.	Die Restglieder der Interpolationsformeln von NEWTON	84
2.7.	Interpolationsformeln mit zentralen Differenzen	85
2.7.1.	Interpolationsformeln von GAUSS, STIRLING, BESSEL und EVERETT	85
2.7.2.	Die Restglieder der Interpolationsformeln mit zentralen Differenzen	92
2.7.3.	Empfehlungen für die Anwendung der verschiedenen Interpolationsformeln	97
2.8.	Einige andere Methoden zur Aufstellung von Interpolationsformeln für äquidistante Stützstellen	99
2.8.1.	Das Frasersche Diagramm	99
2.8.2.	Begriffe der Operatorenmethode zur Herleitung der Interpolationsformeln	102
2.9.	Konvergenz des Interpolationsprozesses	105
2.10.	Interpolation von periodischen Funktionen	109
2.11.	Die allgemeine Interpolationsaufgabe mit algebraischen Polynomen	113
2.11.1.	Das Interpolationspolynom von HERMITE	113
2.11.2.	Allgemeine Form des Interpolationspolynoms von HERMITE	118
2.11.3.	Das Restglied der Interpolationsformel von HERMITE	121
2.11.4.	Steigungen mit mehrfach auftretenden Argumentwerten	122
2.11.5.	Verallgemeinerte Interpolationsformel von NEWTON mit Steigungen	128
2.12.	Interpolation von Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler	130
2.12.1.	Die Schwierigkeiten bei der Interpolation von Funktionen mehrerer Variabler	130
2.12.2.	Die Verallgemeinerung der Newtonschen Interpolationsformel auf den Fall mehrerer Variabler	131
2.12.3.	Andere Verfahren zur Aufstellung der Interpolationspolynome für Funktionen mehrerer Variabler	136
2.13.	Interpolation von Funktionen einer komplexen Variablen	138
2.14.	Die Anwendung der Interpolation zur Herstellung von Funktionentafeln	139
2.15.	Die inverse Interpolation	143
2.16.	Übungen	147
3.	Numerische Differentiation und Integration	154
3.1.	Die Aufgabe der numerischen Differentiation	154
3.2.	Formeln zur numerischen Differentiation	157
3.2.1.	Formeln zur numerischen Differentiation bei nicht äquidistanten Stützstellen	157
3.2.2.	Formeln zur numerischen Differentiation bei äquidistanten Stützstellen	162
3.2.3.	Formeln zur numerischen Differentiation ohne Differenzen	165
3.2.4.	Die Methode der unbestimmten Koeffizienten	170
3.3.	Die näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale	170
3.3.1.	Verschiedene Wege zur Konstruktion von Quadraturformeln	171
3.3.2.	Einige allgemeine Bemerkungen	177
3.4.	Die Formeln von NEWTON-COTES	178

3.4.1.	Herleitung der Formeln	178
3.4.2.	Die Restglieder der Formeln	181
3.4.3.	Die Rechteckformel, die Trapezregel und die SIMPSON-Regel	186
3.5.	Die Quadraturformel von GAUSS	194
3.5.1.	Konstruktion der Formeln. Abszissen der Formeln von GAUSS	194
3.5.2.	Das Restglied der Formeln von GAUSS	198
3.5.3.	Die Koeffizienten der Formeln von GAUSS	199
3.5.4.	Die Formel der numerischen Integration von HERMITE	203
3.5.5.	Die Formeln der numerischen Integration von MARKOFF	206
3.6.	Die Formeln von TSCHEBYSCHEFF zur numerischen Integration	209
3.6.1.	Konstruktion der Formeln	209
3.6.2.	Das Restglied der Formeln von TSCHEBYSCHEFF	216
3.7.	Konvergenzuntersuchungen bei der numerischen Integration	220
3.8.	Die Formel von EULER	224
3.8.1.	Zahlen und Polynome von BERNOULLI	225
3.8.2.	Die Eulersche Formel	229
3.9.	Quadraturformeln bester Annäherung auf einer Klasse von Funktionen	234
3.10.	Einige Bemerkungen über die Anwendung von Quadraturformeln	242
3.11.	Berechnung uneigentlicher Integrale	247
3.11.1.	Die Methode der Beseitigung der Singularitäten	248
3.12.	Näherungsweise Berechnung mehrfacher Integrale	252
3.12.1.	Die Methode der wiederholten Anwendung von Quadraturformeln	252
3.12.2.	Das Ersetzen des Integranden durch ein Interpolationspolynom	256
3.12.3.	Die Methode von LJUSTERNIK und DITKIN	259
3.12.4.	Die Methode der optimalen Koeffizienten von KOROBOW	261
3.12.5.	Die Methode der statistischen Versuche (Die Monte-Carlo-Methode)	266
3.13.	Übungen	271
4.	Die gleichmäßige Approximation	275
4.1.	Beste Approximation in linearen normierten Räumen	277
4.1.1.	Der lineare normierte Raum	277
4.1.2.	Element der besten Approximation (Minimallösung)	277
4.1.3.	Existenz der Minimallösung	278
4.1.4.	Die Unität der Minimallösung	280
4.2.	Beste gleichmäßige Approximation stetiger Funktionen durch verallgemeinerte Polynome	281
4.2.1.	Beste Approximation im Raum C	281
4.2.2.	Das Theorem von HAAR	282
4.2.3.	Das Theorem von TSCHEBYSCHEFF	287
4.3.	Algebraische Polynome bester gleichmäßiger Approximation	290
4.3.1.	Das Theorem von WEIERSTRASS	291
4.3.2.	Bemerkungen über den Approximationsgrad bei BERNSTEIN-Polynomen und Trigonometrische Polynome bester Approximation	295
4.4.	Trigonometrische Polynome bester Approximation	296
4.5.	Numerische Verfahren zur Konstruktion algebraischer Polynome bester Approximation	299
4.5.1.	Vorbetrachtungen	300

4.5.2.	Erstes numerisches Verfahren zur Konstruktion eines Polynoms bester Approximation	306
4.5.3.	Zweites numerisches Verfahren zur Konstruktion eines Polynoms bester Approximation	309
4.6.	Übungen	314
5.	Approximation im quadratischen Mittel	316
5.1.	Der HILBERT-Raum	317
5.2.	Orthonormierte Systeme im HILBERT-Raum. FOURIER-Reihen	320
5.3.	Approximation im HILBERT-Raum	325
5.3.1.	Die Konstruktion des Elementes bester Approximation	326
5.4.	Die Approximation im Mittel von Funktionen durch algebraische Polynome	328
5.4.1.	Systeme orthogonaler Polynome	331
5.4.2.	Rekursionsformel für orthogonale Polynome	333
5.4.3.	Die Identität von CHRISTOFFEL-DARBOUX	334
5.4.4.	Eigenschaften der Nullstellen orthogonaler Polynome	335
5.4.5.	Differentialgleichungen, denen orthogonale Polynome genügen	336
5.5.	Einige Spezialfälle orthogonaler Polynomsysteme	338
5.6.	Approximation im Mittel von Funktionen durch trigonometrische Polynome	347
5.7.	Approximation von gegebenen Funktionen mit der Methode der kleinsten Quadrate	347
5.8.	Approximation nach der Methode der kleinsten Quadrate mittels algebraischer Polynome	349
5.8.1.	Ein System von Polynomen, die auf einer Menge äquidistanter Punkte orthogonal sind	351
5.9.	Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Glättung von Beobachtungsergebnissen	359
5.10.	Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Konstruktion empirischer Formeln. Lösung von linearen Gleichungssystemen nach der Methode der kleinsten Quadrate	360
5.11.	Approximation von Funktionen, die durch Tabellen gegeben sind, mittels trigonometrischer Polynome nach der Methode der kleinsten Quadrate	369
5.12.	RUNGE-Schema zur Berechnung der Koeffizienten a_0, a_k, b_k im Fall $N = 4p$	373
5.13.	Übungen	377
	Literatur	379
	Namen- und Sachregister	382