

Inhalt

Estimationstheorie I: Grundlagen und stochastische Konzepte

1	Einführung	1
1.1	Beschreibung der Problematik	1
1.2	Zielsetzung und Motivation einer stochastischen Interpretation der Realität	3
1.3	Optimalität und bedingte Verteilungsdichte, statistisches Konzept eines Filters	5
1.4	Optimalität, Kalman–Filter und Wiener Filter	7
1.5	Grundlegende Annahmen und ihre physikalische Bedeutung	9
1.6	Ein einfaches Beispiel zur Anwendung eines Estimationsalgorithmus	11
1.7	Zweck und Aufbau der Darstellung	18
1.8	Literatur zu Kapitel 1	21
2	Deterministische Systemmodelle im Zustandsraum	22
2.1	Einführung und Zielsetzung	22
2.2	Zeitkontinuierliche Systeme	22
2.2.1	Einführung der Zustandsraumdarstellung	22
2.2.2	Differentialgleichungssystem und Zustandsraum– darstellung	24
2.2.3	Zusammenhang der Zustandsraumdarstellung mit der Übertragungsfunktion	29
2.3	Mathematische Definition der Zustandsraum– beschreibung	31
2.3.1	Konventionen und Notation	31
2.3.2	Zustand	31
2.3.3	Zustandsübergangsfunktion	32
2.3.3.1	Globale Zustandsübergangsfunktion	33
2.3.3.2	Bedingungen an die globale Übergangsfunktion	33

2.3.3.3	Lokale Übergangsfunktion	35
2.3.3.3.1	Zeitdiskrete Systeme	35
2.3.3.3.2	Zeitkontinuierliche Systeme	36
2.3.4	Ausgangsfunktionen	37
2.3.5	Zustandsraumgleichungen	38
2.3.5.1	Lineare Zustandsraumgleichungen	38
2.3.5.2	Zeitinvariante Systeme	39
2.3.6	Spezielle Normalformen der Zustandsraummodelle	41
2.3.6.1	Physikalische Zustandsraumdarstellung	41
2.3.6.2	Regelungsnormalform	41
2.3.6.3	Beobachternormalform	47
2.3.6.4	Kanonische Form, Jordan-Form	51
2.3.6.4.1	Einfache Eigenwerte von F (einfache Pole von $H(s)$)	51
2.3.6.4.2	Jordan-Form für mehrfache Eigenwerte (mehrfache Pole von $H(s)$)	53
2.3.6.5	Zusammenfassung	56
2.3.7	Äquivalente Systeme	57
2.3.7.1	Lineare äquivalente Systeme	57
2.3.7.2	Zusammenhang zwischen den Matrizen A, B, C und A^*, B^*, C^*	58
2.3.7.3	Interpretation der Ähnlichkeitstransformation	59
2.4	Lösung der Zustandsdifferentialgleichung für lineare Systeme – Globale Zustandsübergangsfunktion –	61
2.4.1	Lösung der Differentialgleichung	61
2.4.2	Globale Zustandsübergangsfunktion und Lösung der Zustandsdifferentialgleichung bei linearen, zeitinvarianten Systemen	64
2.4.2.1	Berechnung der globalen Systemzustandsübergangs- matrix mit Hilfe der Laplace-Transformation	67
2.4.3	Zusammenfassung	68
2.5	Ableitung eines äquivalenten zeitdiskreten Zustandsraummodells	69
2.5.1	Definition des zeitdiskreten äquivalenten Zustandsraummodells	70

2.5.2	Ableitung des zeitdiskreten äquivalenten Modells	71
2.5.2.1	Zeitdiskretes Äquivalent für zeitinvariante Systemmatrizen	74
2.5.2.2	Vereinfachung für langsam veränderliche Matrizen $F(t)$, $B_c(t)$	75
2.5.2.3	Zusammenfassung: Zeitdiskretes äquivalentes Zustandsraummodell	75
2.5.3	Globale Systemübergangsfunktion für zeitdiskrete lineare Systeme	76
2.5.3.1	Vereinfachung für zeitinvariante Systeme	78
2.6	Erreichbarkeit, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit linearer Systeme	79
2.6.1	Definition der Begriffe	79
2.6.1.1	Steuerbarkeit	79
2.6.1.2	Erreichbarkeit	80
2.6.1.3	Beobachtbarkeit	80
2.6.2	Vollständige Beobachtbarkeit	81
2.6.2.1	Zeitinvariante, lineare Systeme	81
2.6.2.2	Beobachtbarkeit für zeitinvariante Systeme	85
2.6.2.3	Zusammenfassung und Interpretation	86
2.6.3	Vollständige Erreichbarkeit	86
2.6.3.1	Erreichbarkeit für zeitinvariante Systeme	91
2.6.3.2	Zusammenhang von Erreichbarkeit und Steuerbarkeit bei linearen Systemen	91
2.7	Zusammenfassung	92
2.8	Literatur zu Kapitel 2	93
3	Wahrscheinlichkeit und statische Modelle	94
3.1	Einführung und Zielsetzung	94
3.2	Axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie	94
3.2.1	Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit	94

3.2.2	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit	99
3.2.2.1	Ereignisse, Elementarereignisse, Ereignisraum	99
3.2.2.2	Klassen von Teilmengen, Felder	101
3.2.2.3	Definition der Wahrscheinlichkeitsfunktion	105
3.2.2.4	Einführung des Wahrscheinlichkeitsraumes	107
3.3	Zufallsvariablen	108
3.3.1	Skalare Zufallsvariablen	108
3.3.2	Vektorielle Zufallsvariablen	109
3.3.3	Zusammenfassung	111
3.4	Einführung der Wahrscheinlichkeitsverteilung	113
3.5	Zusammenfassung	114
3.6	Wahrscheinlichkeit und Verteilungsdichte	115
3.6.1	Verteilungsfunktion	115
3.6.1.1	Monotonieeigenschaft der Verteilungsfunktion	117
3.6.1.2	Weitere Eigenschaften der Verteilungsfunktion	118
3.6.2	Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte	126
3.6.3	Spezielle skalare Verteilungsdichten und Verteilungsfunktionen	132
3.6.4	Zusammenfassende Interpretation	135
3.7	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Dichten	136
3.8	Funktionen von Zufallsvariablen	148
3.9	Erwartungswerte und Momente von Zufallsvariablen	155
3.9.1	Rechenregeln für Erwartungswerte	156
3.9.2	Erwartungswerte spezieller Funktionen	156
3.9.2.1	Ensemblemittelwert oder linearer Erwartungswert	156
3.9.2.2	Korrelationsmatrix (2. nicht-zentrales Moment)	157
3.9.2.3	(Auto-)Kovarianzmatrix (2. zentrales Moment)	157
3.9.2.3.1	Eigenschaften der Kovarianzmatrix	158
3.9.2.4	Bedeutung der Momente als deterministische Kenngrößen stochastischer Variablen	160
3.9.2.5	Kreuzkorrelations- und Kreuzkovarianzmatrix	161
3.9.2.5.1	Kreuzkorrelationsmatrix	161

3.9.2.5.2	Kreuzkovarianzmatrix	162
3.10	Unabhängigkeit, Unkorreliertheit, Orthogonalität	163
3.11	Bedingte Erwartungswerte	166
3.12	Charakteristische Funktionen	171
3.13	Verteilungsdichtefunktion der Summe von unabhängigen Zufallsvariablen	174
3.14	Gaußverteilte Zufallsvektoren	176
3.14.1	Charakteristische Funktion	180
3.14.2	Momente einer gaußverteilten Zufallsvariablen	186
3.14.3	Unkorreliertheit und Unabhängigkeit bei gaußverteilten Zufallsvariablen	188
3.14.4	Zentraler Grenzwertsatz	191
3.14.5	Berechnung der bedingten Verteilungsdichtefunktion von gaußverteilten Zufallsvariablen	197
3.15	Estimation mit linearen, gauß'schen Systemmodellen	209
3.15.1	Beispiel zur Anwendung des Estimationsalgorithmus	218
3.15.2	Gewichtete 'Least Squares' Estimation	224
3.15.2.1	Rekursive Weighted Least Squares Estimation	228
3.15.2.2	Rekursive bedingte Erwartungswertschätzung	233
3.16	Bayes'sche Estimationstheorie	235
3.16.1	Minimum Varianz Estimation	238
3.16.2	Maximum a-posteriori-Estimation	240
3.16.3	Maximum Likelihood-Estimation	241
3.17	Orthogonale Projektionen von Zufallsvariablen – Orthogonalitätstheoreme, Optimale Estimation nach dem Orthogonalitätsprinzip	244
3.17.1	Orthogonale Projektionen	244
3.17.2	Entwicklungstheorem für beliebige Vektoren	255
3.17.3	Projektionstheorem für beliebige Vektoren	257
3.17.4	Optimale Estimation nach dem Orthogonalitäts- prinzip	259
3.17.5	Zusammenfassung orthogonaler Projektionen	267

3.18	Zusammenfassung	268
3.19	Literatur zu Kapitel 3	269
4	Lineare dynamische Systemmodelle und stochastische Prozesse	270
4.1	Einleitung	270
4.2	Stochastische Prozesse	270
4.2.1	Unabhängige, unkorrelierte und weiße Prozesse	276
4.2.2	Gaußprozesse	277
4.2.3	Stationäre stochastische Prozesse und Leistungsdichtespektren	278
4.2.3.1	Korrelation und Kovarianz von schwach stationären Prozessen	279
4.2.3.1.1	Autokorrelation und Autokovarianz von schwach stationären Prozessen	279
4.2.3.1.2	Kreuzkorrelationsfunktionen schwach stationärer Prozesse	281
4.2.3.2	Fouriertransformation der Korrelationsfunktionen	283
4.2.3.2.1	Leistungsdichtespektrum	283
4.2.3.2.2	Kreuzleistungsdichtespektrum	284
4.2.3.3	Ergodische Prozesse	285
4.3	Einführung in die dynamische Systemmodellierung	286
4.4	Grundlagen und Basisprozesse: Weißes, gaußverteiltes Rauschen und Brown'sche Prozesse	291
4.4.1	Stochastische Konvergenzbegriffe	292
4.4.1.1	Konvergenz im quadratischen Mittel (Mean square convergence)	293
4.4.1.2	Konvergenz in Wahrscheinlichkeit	293
4.4.1.3	Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit 1	294
4.4.1.4	Zusammenhänge zwischen den Konvergenzbegriffen	295
4.4.2	Brown'sche Prozesse (Wiener-Prozesse)	298
4.4.2.1	Prozesse mit unabhängigen Inkrementen	298
4.4.2.2	Brown'scher Prozeß	299

4.4.2.2.1	Eigenschaften eines skalaren Brown'schen Prozesses	300
4.4.2.2.2	Zusammenhang zwischen Brown'schem Prozeß und weißem, stationärem Rauschen	307
4.4.2.2.3	Vektorielle Brown'sche Prozesse	312
4.5	Stochastische Integrale	313
4.5.1	Eigenschaften stochastischer Integrale	320
4.5.2	Vektorielle stochastische Integrale	324
4.6	Stochastische Differentiale	326
4.6.1	Stochastisches Differential eines Produktes einer deterministischen Zeitfunktion und eines stochastischen Integrals	326
4.6.2	Lineare stochastische Differentialgleichungen	331
4.6.2.1	Berechnung der Momente von $\underline{x}(t, \cdot)$	335
4.6.2.2	Differentialgleichungsdarstellung der Momente	342
4.6.2.3	Formale Prozeßbeschreibung mit weißem, gaußverteiletem Rauschen	344
4.6.3	Lineare stochastische Differenzengleichungen	348
4.6.3.1	Differentialgleichungsdarstellung der zeitdiskreten Größen	351
4.6.3.2	Momente des zeitdiskreten Prozesses $\underline{x}(\cdot, \cdot)$	353
4.7	Das Gesamtsystemmodell	354
4.7.1	Stochastische Eigenschaften des Meßprozesses	357
4.7.2	Modellierung von korreliertem Rauschen, vergrößerte Zustandsvektoren	359
4.7.2.1	Formfilterdesign für skalare, stationäre Probleme	363
4.7.2.2	Praktischer Formfilterentwurf	376
4.8	Zusammenfassung	377
4.9	Literatur zu Kapitel 4	378

Estimationstheorie II: Anwendungen – Kalman-Filter

5	Optimale Estimation mit linearen, stochastischen Systemmodellen – Kalman-Filter	379
5.1	Einleitung und Zielsetzung	379
5.2	Das zeitdiskrete Kalman-Filter	380
5.2.1	Modellierung des Estimationsproblems	380
5.2.1.1	Systemmodell	380
5.2.1.2	Beobachtungsmodell	381
5.2.2	Kalman-Filter und bedingte Verteilungsdichtefunktion	382
5.2.2.1	Arbeitsweise des Filteralgorithmus	383
5.2.3	Berechnung der Prädiktionsdichte	384
5.2.3.1	Berechnung der bedingten Momente der Prädiktionsdichte	390
5.2.3.1.1	Bedingter Erwartungswert (Voraussageschätzwert)	390
5.2.3.1.2	Bedingte Kovarianz	394
5.2.3.1.3	Zusammenfassende Darstellung der Prädiktionsdichte	395
5.2.3.1.4	Interpretation von Voraussage und Voraussagefehlerkovarianz	395
5.2.4	Berechnung der Filterdichte	397
5.2.4.1	Bedeutung der Filterdichte $f_{\underline{x}(k)/\underline{Y}(k)}(\underline{\xi}_k/\underline{Y}_k)$	397
5.2.4.2	Allgemeine Herleitung der Filterdichte	397
5.2.4.2.1	Berechnung der Einzelverteilungsdichten	399
5.2.4.2.1.1	Berechnung von Term 1	399
5.2.4.2.1.2	Berechnung des Nenners	401
5.2.4.2.2	Zusammenfassung der Filterdichte	403
5.2.4.3	Umformungen der Filterdichte	403
5.2.4.3.1	Umformung der Determinanten	404
5.2.4.3.2	Umformung des Exponenten	409
5.2.4.4	Abschließende Zusammenfassung der Filterdichte	416
5.2.4.4.1	Formulierung und Interpretation des Filterschätzwertes	417
5.2.5	Zusammenfassung des Kalman-Filteralgorithmus	419
5.2.5.1	Systemdarstellung	419

5.2.5.2	Kalman-Filteralgorithmus	420
5.3	Statistische Prozesse innerhalb des Kalman-Filters	423
5.3.1	Betrachtung des Schätzfehlers	423
5.3.2	Betrachtung der Residuen- oder Innovationssequenz	429
5.3.3	Betrachtung der Korrektursequenz $K(k) \cdot \underline{r}(k)$	431
5.3.3.1	Alternative Ableitung der Kalman-Gain-Matrix bei bekannter Struktur des Kalman-Filters	434
5.4	Ableitung des Kalman-Filters über den Ansatz orthogonaler Projektionen	436
5.4.1	Ableitung des Kalman-Filters	436
5.4.2	Zusammenfassung und Interpretation	443
5.5	Betrachtung der Innovationen, Ableitung des Kalman-Filters für korrelierte Driving noise und Measurement noise Prozesse	445
5.5.1	Die Innovationssequenz	445
5.5.1.1	Eigenschaften der Innovationssequenz	447
5.5.1.2	Zusammenhang von Innovationssequenz und Zufallsvariablensequenz	452
5.5.1.3	Anwendung der Innovationssequenz zur Berechnung bedingter Erwartungswerte	456
5.5.2	Ableitung des Kalman-Filters über den Innovationsansatz	460
5.5.2.1	Ableitung des rekursiven Zustandsschätzalgorithmus	461
5.5.2.1.1	Zusammenfassung des Algorithmus für korrelierte Rauschbeiträge	472
5.5.3	Zusammenfassung des Unterpunktes	473
5.6	Alternative, mathematisch äquivalente Formulierungen des Kalman-Filters	474
5.6.1	Alternative Formulierungen des Kovarianzupdates im Meßwertverarbeitungszyklus	474
5.6.2	Inverse Kovarianzformulierung des Varianzenzyklus	479
5.6.2.1	Bedeutung der inversen Kovarianzformulierung	481

5.6.2.1.1	Startup-Formulierung bei fehlenden a-priori-Kenntnissen	481
5.6.2.1.2	Inverse Kovarianzformulierung und Fisher'sche Informationsmatrix	486
5.7	Stabilitätsbetrachtungen des Kalman-Filteralgorithmus	489
5.7.1	Stabilitätsformen und deren Bedeutung	490
5.7.2	Stabilitätsbedingungen für zeitvariante Systeme	492
5.7.3	Stabilitätsuntersuchung des Kalman-Filters	493
5.7.4	Sonderfälle der Stabilität – Fehlerfreie Messungen ($R(k) \equiv 0$)	495
5.8	Kalman-Filterung mit Kovarianzdaten des Meßprozesses und Innovationsmodell	505
5.8.1	Motivation und Zielsetzung	505
5.8.2	Ausgangskovarianzkern eines linearen, stochastischen Systemmodells	506
5.8.3	Bestimmung eines Kalman-Filters aus den Kovarianzdaten des Prozesses $\underline{y}(\cdot, \cdot)$	509
5.8.3.1	Zusammenfassung des Prädiktions-Kalman-Filters	514
5.8.3.2	Signalschätzung mit Kovarianzdaten	516
5.8.3.2.1	Fehlerbetrachtung der Signalestimation	517
5.8.4	Zusammenfassung zur Estimation mit Kovarianzdaten des Ausgangs	520
5.8.5	Innovationsmodell	522
5.8.5.1	Eigenschaften des Innovationsmodells	525
5.9	Praktische Probleme – Filterdivergenz – Divergenz- und Plausibilitätstests	527
5.9.1	Ursachen der Filterdivergenz	530
5.9.2	Kennzeichen der Filterdivergenz	531
5.9.3	Plausibilitätskontrolle von Meßwerten	533
5.9.3.1	Hypothesentests mit Likelihood-Funktionen	535
5.9.3.2	Behandlung von Ausreißern	541
5.10	Zusammenfassung	542

5.11	Literatur zu Kapitel 5	544
6	Anwendung von Kalman-Filtern	549
6.1	Anwendung des Kalman-Filter zur Meßwertverarbeitung in einem Laserpuls-Radar	551
6.1.1	Beschreibung des Meßproblems und der Zielsetzung	551
6.1.2	Modellierung des Problems	553
6.1.2.1	Bewegungsmodell des bewegten Zieles, kontin. Zustandsraummodell	553
6.1.2.1.1	Bestimmung der freien Modellparameter α und q	555
6.1.2.2	Globale Zustandsübergangsfunktion, Berechnung der Systemübergangsmatrix, Zeitdiskretes Äquivalent	560
6.1.2.2.1	Vereinfachung der Systemmatrix A und der Kovarianz- matrix für kleine Abtastzeiten	564
6.1.2.2.1.1	Vereinfachung der Systemmatrix A	564
6.1.2.2.1.2	Vereinfachung der Kovarianzmatrix Q	565
6.1.2.2.1.3	Interpretation der Modellvereinfachung	567
6.1.2.2.1.4	Modellreduzierung – Vereinfachtes Bewegungsmodell	572
6.1.2.2.1.5	Interpretation der Modellvereinfachung und Vergleich mit dem ersten Entwurf	575
6.1.2.2.1.6	Zusammenfassung der Erkenntnisse	584
6.1.2.3	Meß- und Beobachtungsmodell des Problems	585
6.1.2.3.1	Identifikation der Fehlerquellen	586
6.1.2.3.2	Modellierung der Systemdriften	586
6.1.2.3.3	Modellierung der Brummeinflüsse	587
6.1.2.3.3.1	Kontinuierliche Modellierung der Brummeinflüsse und anschließende Zeitdiskretisierung	587
6.1.2.3.3.2	Kritik der Modellbildung	590
6.1.2.3.3.3	Modellierung eines zeitdiskreten Sinus- Cosinusgenerators	591
6.1.2.3.4	Zusammenfassung des Störmodells	594
6.1.2.4	Zusammenfassung von Bewegungsmodell und Störmodell	595
6.1.2.4.1	Verbessertes Beobachtungsmodell	599
6.1.3	Kalman-Filterformulierung	600
6.1.3.1	Filterarbeitsweise – Musterfunktionen der Schätzwertverläufe	604

6.1.3.1.1	Simulation	607
6.2	Reduktion der Filtermodellordnung, Suboptimale Filterung	623
6.2.1	Filteraufwandsbetrachtungen – Reduzierung des Filtermodells	623
6.2.1.1	Arbeitsweise des reduzierten Filters – Muster- funktionen der Schätzwerte	627
6.3	Zusammenfassung des Kapitels	638
6.4	Literatur zu Kapitel 6	640
7	Anhang	643
	Sachverzeichnis	652