

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL I

Grundlagen der Analysis

§ 1. Begriff der Zahlenfolge. Einfache Eigenschaften von Zahlenfolgen	1
1.1. Endliche Methoden und Iterationsverfahren	1
1.2. Begriff der Zahlenfolge	3
1.3. Beschränkte Zahlenfolgen	5
1.4. Untere und obere Schranke einer Zahlenfolge	9
1.5. Monotone Zahlenfolgen	12
1.6. Alternierende und oszillierende Zahlenfolgen	15
1.7. Arithmetische Folgen, Differenzenfolgen	16
1.8. Geometrische Folgen	18
§ 2. Konvergente Zahlenfolgen	20
2.1. Der Konvergenzbegriff	21
2.2. Weitere Aussagen über konvergente Zahlenfolgen	27
2.3. Einfache Sätze über konvergente Zahlenfolgen	29
2.4. Divergente Zahlenfolgen	33
2.5. Konvergenzkriterium für monotone Zahlenfolgen	35
2.6. Das CAUCHYSche Konvergenzkriterium	36
§ 3. Unendliche Reihen	37
3.1. Begriff der unendlichen Reihe	37
3.2. Konvergenzkriterien	41
3.3. Vergleichskriterien	43
3.4. Weitere Sätze über unendliche Reihen	43
§ 4. Zahlen- und Punktfolgen	47
4.1. Der Mengenbegriff	47
4.2. Abzählbare Mengen	49
4.3. Das System der reellen Zahlen	50
4.4. Beschränkte Mengen	53
4.5. Häufungspunkt und Häufungsgrenzen	54
4.6. Zahlenmengen und Zahlenfolgen	55
4.7. Punktfolgen	56
4.8. Punktfolgen	58
4.9. Weitere Begriffe bei Punktfolgen	59
4.10. Mengenoperationen	60
§ 5. Funktionen	64
5.1. Der Funktionsbegriff	64
5.2. Spezielle Funktionstypen	68
§ 6. Grenzwert von Funktionen	74
6.1. Der Begriff des Grenzwertes einer Funktion	74
6.2. Einseitige Grenzwerte	79

6.3. Grenzwert einer Funktion bei unbegrenztem Anwachsen des Argumentes	82
6.4. Sätze über Grenzwerte	84
6.5. Uneigentliche Grenzwerte	85
§ 7. Stetigkeit	86
7.1. Begriff der Stetigkeit	87
7.2. Einseitige Stetigkeit. Stetigkeit in einem Intervall	88
7.3. Unstetigkeitsstellen	89
7.4. Sätze über stetige Funktionen	92
7.5. Umkehrfunktion	96
§ 8. Differenzierbarkeit	97
8.1. Begriff des Differentialquotienten	98
8.2. Einseitige und unendliche Ableitungen. Differenzierbarkeit in einem Intervall	101
8.3. Grundregeln der Differentialrechnung	104
8.4. Weitere Sätze über differenzierbare Funktionen	106
8.5. Mittelwertsatz der Differentialrechnung	108
8.6. Höhere Ableitungen	111
8.7. Sätze über mehrfach differenzierbare Funktionen	112

KAPITEL II

Iterative Lösung von Gleichungen

§ 1. Problemstellung	117
1.1. Graphische Gleichungsauflösung	118
1.2. Näherungsverfahren und formelmäßige Auflösung	121
1.3. Iterierfähige Form	122
1.4. Iterationsvorschrift	124
§ 2. Konvergenzsätze und Fehlerabschätzungen	125
2.1. Konvergenzsatz für differenzierbare Funktionen	126
2.2. Konvergenzsätze bei Gültigkeit einer LIPSCHITZ-Bedingung	131
2.3. Fehlerabschätzungen	135
2.4. Konvergenzsätze für monotone Funktionen	138
2.5. Fehlerabschätzungen für monotone Funktionen	143
§ 3. Iterative Berechnung der Quadratwurzel	146
§ 4. Überführung auf eine iterierfähige Form	151
§ 5. Konvergenzbeschleunigung	156
§ 6. Das NEWTONSche Verfahren	159
6.1. Die Iterationsvorschriften des NEWTONSchen Verfahrens	159
6.2. Das vereinfachte NEWTONSche Verfahren	160
6.3. Das gewöhnliche NEWTONSche Verfahren	163
6.4. Konvergenzgrad	167
6.5. Beispiele	169
§ 7. Das Verfahren von NEWTON-HORNER	171
7.1. Das HORNER-Schema	172
7.2. Rechenkontrollen beim HORNER-Schema	175
7.3. Das vollständige HORNER-Schema	178
7.4. Das Verfahren von NEWTON-HORNER	181
§ 8. Allgemeinere Iterationen	183

KAPITEL III

**Metrische Räume und Verfahren
zur Lösung linearer Gleichungssysteme**

§ 1. Metrischer Raum.	190
1.1. Definition des metrischen Raumes	190
1.2. Beispiele von metrischen Räumen	191
1.3. Der Konvergenzbegriff im metrischen Raum.	193
1.4. Vollständige metrische Räume	196
§ 2. Operatoren in metrischen Räumen	197
2.1. Begriff des Operators	197
2.2. Selbstabbildung	199
2.3. Kontraktionsoperator.	199
2.4. Fixpunkt eines Operators	201
§ 3. Fixpunktsatz	202
3.1. Beweis des Fixpunktsatzes	202
3.2. Folgerungen aus dem Fixpunktsatz.	204
§ 4. Das Gesamtschrittverfahren bei linearen Gleichungssystemen	205
4.1. Beschreibung der Iterationsprozesses	205
4.2. Konvergenzkriterien	206
4.3. Fehlerabschätzungen	207
4.4. Organisation der numerischen Rechnung	211
4.5. Numerisches Beispiel	214
§ 5. Monotone Iterationen.	216
5.1. Monotone Iterationsfolgen.	216
5.2. Wahl des Anfangsvektors	217
5.3. Fehlerabschätzung	219
5.4. Numerisches Beispiel	219
5.5. Einschließung der Lösung.	221
5.6. Verallgemeinerung der Aussagen	222
§ 6. Das Einzelschrittverfahren	224
6.1. Beschreibung des Iterationsprozesses	224
6.2. Konvergenzkriterien	225
6.3. Fehlerabschätzungen	230
6.4. Numerisches Beispiel	235
6.5. Die GAUSSsche Transformation.	236
6.6. Monotone Iterationen.	237
§ 7. Iterative Inversion von Matrizen.	240
7.1. Das Gesamtschrittverfahren	240
7.2. Das Einzelschrittverfahren	243
§ 8. Eliminationsverfahren	246
8.1. Das Vorgehen bei den Eliminationsverfahren	246
8.2. Darstellung der Eliminationsverfahren in Matrizenform	251
8.3. Inversion von Matrizen	254
8.4. Das Verfahren von GAUSS-BANACHIEWICZ	254
8.5. Vergleich von Eliminations- und Iterationsverfahren	261

KAPITEL IV

**Lineare Räume und lineare Operatoren.
Iterative Matrizeninversion**

§ 1. Lineare und lineäre normierte Räume	264
1.1. Der Gruppenbegriff	265
1.2. Der Begriff des Ringes	269
1.3. Lineare Räume	271
1.4. Lineare normierte Räume	272
§ 2. Lineare Operatoren und Operatorenräume	281
2.1. Einfache Eigenschaften von Operatoren	281
2.2. Lineare Operatorenräume	286
2.3. Normierte Operatorenräume	291
2.4. Normierte Ringe	295
§ 3. Ergänzungen zur Theorie linear konvergenter Iterationsverfahren	297
3.1. Iterative Bestimmung des Fixpunktes	297
3.2. Gesamtschrittverfahren	298
3.3. Monotone absolute Normen	299
3.4. Einzelschrittverfahren	300
3.5. Interpretation des Einzelschrittverfahrens als Gesamtschrittverfahren	303
§ 4. Quadratisch konvergentes Gesamtschrittverfahren zur Matrizeninversion	305
4.1. Beschreibung des Iterationsprozesses	305
4.2. Konvergenzkriterium	306
4.3. Fehlerabschätzungen	307
4.4. Organisation der numerischen Rechnung	310
4.5. Numerisches Beispiel	311
4.6. Monotone Iterationen	313
4.7. Bemerkungen zur Anwendung des Iterationsverfahrens	313
§ 5. Quadratisch konvergentes Einzelschrittverfahren zur Matrizeninversion	314
5.1. Beschreibung des Iterationsprozesses	314
5.2. Konvergenz des Einzelschrittverfahrens	315
5.3. Fehlerabschätzungen	317
5.4. Numerisches Beispiel	320

KAPITEL V

**Verbesserung der numerischen Genauigkeit
von Eliminationsverfahren durch Pivotwahl**

§ 1. Das Austauschverfahren	324
1.1. Herleitung der Transformationsgleichungen	324
1.2. Numerisches Beispiel	327
1.3. Rechenkontrolle	328
1.4. Einführung einer Kellerzeile	329
§ 2. Das Verfahren von GAUSS-JORDAN-RUTISHAUSER zur Inversion von Matrizen	330
2.1. Beschreibung des Verfahrens	330
2.2. Numerisches Beispiel	331
2.3. Wahl des Pivotelementes	332
2.4. Lösung linearer Gleichungssysteme	333
2.5. Ausnahmefälle	333

§ 3. Das Verfahren von GAUSS	336
3.1. Beschreibung des Verfahrens	336
3.2. Numerisches Beispiel	337
3.3. Inversion von Matrizen	338
3.4. Das Verfahren von GAUSS-JORDAN	339
§ 4. Vergleich der Eliminationsverfahren	340

KAPITEL VI

**Berücksichtigung von Blockstrukturen
beim Lösungsprozeß**

§ 1. Die Formel von FROBENIUS-SCHUR	347
1.1. Herleitung der Strukturbeziehung	347
1.2. Organisation des Rechnungsganges	349
1.3. Beispiel	350
1.4. Anwendungsmöglichkeiten	351
§ 2. Die Methode des Ränderns	358
2.1. Herleitung des Inversionsalgorithmus	358
2.2. Numerische Beispiele	361
2.3. Lösung linearer Gleichungssysteme	362
§ 3. Durchführung der Eliminationsverfahren bei Zugrundelegung von Blockstrukturen	364
3.1. Das Verfahren von GAUSS bei Blockstruktur	364
3.2. Zahlenbeispiel	365
3.3. Vor- und Nachteile des Vorgehens	368
3.4. Spezielle Strukturen	369
§ 4. Durchführung der Iterationsverfahren bei Zugrundelegung von Blockstrukturen	371
4.1. Die linear konvergenten Iterationsverfahren bei Blockstruktur	371
4.2. Die quadratisch konvergenten Iterationsverfahren zur Matrizeninversion bei Blockstruktur	373
4.3. Spezielle Strukturen	374
§ 5. Das Iterationsverfahren von HERTWIG	377
5.1. Das HERTWIGSche Verfahren	377
5.2. Beispiel	379

KAPITEL VII

**Berücksichtigung spezieller Eigenschaften
beim Lösungsprozeß**

§ 1. Symmetrische Probleme	381
1.1. Das GAUSSsche Verfahren zur Lösung symmetrischer Gleichungssysteme	381
1.2. Das Verfahren von GAUSS-JORDAN zur Lösung symmetrischer Gleichungssysteme	384
1.3. Das Verfahren von GAUSS-BANACHIEWICZ bei symmetrischen Gleichungssystemen	385
1.4. Inversion symmetrischer Matrizen	386
1.5. Pivotwahl bei symmetrischen Systemen	389
1.6. Iterationsverfahren bei symmetrischen Problemen	395
§ 2. Symmetrische streng positiv definite Probleme	398
2.1. Kriterium für die positive Definitheit	398
2.2. Die Lösungsverfahren bei streng positiv definiten Problemen	398

§ 3. LEONTIEFSche Matrizen	400
3.1. Begriff der LEONTIEFSchen Matrix	400
3.2. Lösung linearer Gleichungssysteme mit LEONTIEFScher Koeffizientenmatrix	402
3.3. Inversion LEONTIEFScher Matrizen	402
3.4. Die NEUMANNsche Reihe	404
3.5. Die Methode von FRAZER-DUNCAN-COLLAR	406
§ 4. Überwiegende Hauptdiagonale und nahezu Dreieckstruktur	406
4.1. Matrizen mit überwiegender Hauptdiagonale	406
4.2. Bemerkungen zur Pivotwahl bei Problemen mit überwiegender Hauptdiagonale	407
4.3. Probleme mit nahezu Dreiecksstruktur	409
4.4. LEONTIEFSche Probleme mit nahezu Dreiecksstruktur	410
§ 5. Iteration mit Elimination	412
5.1. Beschreibung des Verfahrens	412
5.2. Beispiel	414

KAPITEL VIII

Nachträgliche Änderungen

§ 1. Problemstellung	416
1.1. Praktische Aufgabenstellung	416
1.2. Mathematische Beschreibung der Änderungsproblematik	419
1.3. Änderung der rechten Seite linearer Gleichungssysteme	420
1.4. Erklärung von Grundaufgaben	421
§ 2. Änderungsformeln	424
2.1. Die allgemeine Änderungsformel	424
2.2. Änderung um eine Dyade	425
2.3. Änderung eines Elementes	428
2.4. Änderung einer Zeile und Spalte	428
2.5. Änderung von zwei Elementen	429
§ 3. Die Methode der Änderung eines Elementes	430
3.1. Numerischer Algorithmus der Methode	430
3.2. Rechenschema	431
3.3. Zahlenbeispiel	432
3.4. Wiederholte Anwendung der Methode der Änderung eines Elementes	433
3.5. Bemerkungen zur Stabilität des Verfahrens	436
3.6. Künstliche Änderungen	437
3.7. Änderung eines Elementes der Koeffizientenmatrix linearer Gleichungssysteme	438
§ 4. Die Methode der Änderung einer Zeile oder Spalte	441
4.1. Numerischer Algorithmus der Methode der Änderung einer Spalte	441
4.2. Rechenschema und Beispiel	442
4.3. Beurteilung der Methode	443
4.4. Die Methode der Änderung einer Zeile	444
4.5. Lösung von Inversionsaufgaben spezieller Struktur	445
4.6. Verwendung der Änderungsmethoden als allgemeine Inversionsverfahren	446
4.7. Änderung einer Koeffizientenzeile	447
4.8. Änderung einer Koeffizientenspalte	449
4.9. Änderung mehrerer Koeffizientenzeilen	451
4.10. Änderung von zwei Koeffizientenspalten	454
4.11. Änderung einer Koeffizientenzeile und -spalte	455

§ 5. Symmetrische Änderung symmetrischer Matrizen	457
5.1. Der Lösungsalgorithmus bei der symmetrischen Änderung von zwei Elementen	457
5.2. Rechenschema und Beispiel	459
5.3. Der Lösungsalgorithmus bei der symmetrischen Änderung einer Zeile und Spalte	461

KAPITEL IX

**Fehlerhafte Eingangsinformationen und fehlerhafter Prozeß
der numerischen Datenverarbeitung**

§ 1. Der Informationsverlust im Prozeß der numerischen Datenverarbeitung	465
1.1. Ursachen für die Fehlerhaftigkeit des Datenverarbeitungsprozesses	465
1.2. Abschätzung des Informationsverlustes im linearen normierten Raum	468
1.3. Anwendung auf das Inversionsproblem	469
1.4. Anwendung auf lineare Gleichungssysteme	472
§ 2. Abschätzungen für die Norm der Inversen	474
2.1. Abschätzungen mit Hilfe des quadratisch konvergenten Gesamtschrittverfahrens	474
2.2. Abschätzungen mit Hilfe des quadratisch konvergenten Einzelschrittverfahrens	475
2.3. Beispiel	477
2.4. Abschätzungen für LEONTIEFSche Matrizen	478
2.5. Vorgehen bei Verwendung eines Eliminationsverfahrens	480
§ 3. Fehlerhafte Eingangsinformationen	481
3.1. Problemstellung	481
3.2. Abschätzung im linearen normierten Raum	483
3.3. Anwendung auf das Inversionsproblem	484
3.4. Bestimmung des zulässigen Fehlers der Eingangsinformationen	486
3.5. Anwendung auf lineare Gleichungssysteme	488
§ 4. Fehlerhaftigkeit der Eingangsinformationen und des Prozesses der numerischen Datenverarbeitung	490
4.1. Problemstellung	490
4.2. Abschätzung im linearen normierten Raum	491
4.3. Anwendung auf das Inversionsproblem	492
4.4. Anwendung auf lineare Gleichungssysteme	493
§ 5. Iterative Erfassung fehlerhafter Eingangsinformationen	494
5.1. Verwendung des Gesamtschrittverfahrens	494
5.2. Verwendung des Einzelschrittverfahrens	497
Literaturverzeichnis	498
Sachverzeichnis	501