

# INHALTSVERZEICHNIS

## KAPITEL I

### Grundlagen der Analysis

§ 1. Begriff der Zahlenfolge. Einfache Eigenschaften von Zahlenfolgen . . . . .	1
1.1. Endliche Methoden und Iterationsverfahren . . . . .	1
1.2. Begriff der Zahlenfolge . . . . .	3
1.3. Beschränkte Zahlenfolgen . . . . .	5
1.4. Untere und obere Schranke einer Zahlenfolge . . . . .	9
1.5. Monotone Zahlenfolgen . . . . .	12
1.6. Alternierende und oszillierende Zahlenfolgen . . . . .	15
1.7. Arithmetische Folgen, Differenzenfolgen . . . . .	16
1.8. Geometrische Folgen . . . . .	18
§ 2. Konvergente Zahlenfolgen . . . . .	20
2.1. Der Konvergenzbegriff . . . . .	21
2.2. Weitere Aussagen über konvergente Zahlenfolgen . . . . .	27
2.3. Einfache Sätze über konvergente Zahlenfolgen . . . . .	29
2.4. Divergente Zahlenfolgen . . . . .	33
2.5. Konvergenzkriterium für monotone Zahlenfolgen . . . . .	35
2.6. Das CAUCHYSche Konvergenzkriterium . . . . .	36
§ 3. Unendliche Reihen . . . . .	37
3.1. Begriff der unendlichen Reihe . . . . .	37
3.2. Konvergenzkriterien . . . . .	41
3.3. Vergleichskriterien . . . . .	43
3.4. Weitere Sätze über unendliche Reihen . . . . .	43
§ 4. Zahlen- und Punktfolgen . . . . .	47
4.1. Der Mengenbegriff . . . . .	47
4.2. Abzählbare Mengen . . . . .	49
4.3. Das System der reellen Zahlen . . . . .	50
4.4. Beschränkte Mengen . . . . .	53
4.5. Häufungspunkt und Häufungsgrenzen . . . . .	54
4.6. Zahlenmengen und Zahlenfolgen . . . . .	55
4.7. Punktfolgen . . . . .	56
4.8. Punktfolgen . . . . .	58
4.9. Weitere Begriffe bei Punktfolgen . . . . .	59
4.10. Mengenoperationen . . . . .	60
§ 5. Funktionen . . . . .	64
5.1. Der Funktionsbegriff . . . . .	64
5.2. Spezielle Funktionstypen . . . . .	68
§ 6. Grenzwert von Funktionen . . . . .	74
6.1. Der Begriff des Grenzwertes einer Funktion . . . . .	74
6.2. Einseitige Grenzwerte . . . . .	79

6.3. Grenzwert einer Funktion bei unbegrenztem Anwachsen des Argumentes . . . . .	82
6.4. Sätze über Grenzwerte . . . . .	84
6.5. Uneigentliche Grenzwerte . . . . .	85
§ 7. Stetigkeit . . . . .	86
7.1. Begriff der Stetigkeit . . . . .	87
7.2. Einseitige Stetigkeit. Stetigkeit in einem Intervall . . . . .	88
7.3. Unstetigkeitsstellen . . . . .	89
7.4. Sätze über stetige Funktionen . . . . .	92
7.5. Umkehrfunktion . . . . .	96
§ 8. Differenzierbarkeit . . . . .	97
8.1. Begriff des Differentialquotienten . . . . .	98
8.2. Einseitige und unendliche Ableitungen. Differenzierbarkeit in einem Intervall . . . . .	101
8.3. Grundregeln der Differentialrechnung . . . . .	104
8.4. Weitere Sätze über differenzierbare Funktionen . . . . .	106
8.5. Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .	108
8.6. Höhere Ableitungen . . . . .	111
8.7. Sätze über mehrfach differenzierbare Funktionen . . . . .	112

## KAPITEL II

## Iterative Lösung von Gleichungen

§ 1. Problemstellung . . . . .	117
1.1. Graphische Gleichungsauflösung . . . . .	118
1.2. Näherungsverfahren und formelmäßige Auflösung . . . . .	121
1.3. Iterierfähige Form . . . . .	122
1.4. Iterationsvorschrift . . . . .	124
§ 2. Konvergenzsätze und Fehlerabschätzungen . . . . .	125
2.1. Konvergenzsatz für differenzierbare Funktionen . . . . .	126
2.2. Konvergenzsätze bei Gültigkeit einer LIPSCHITZ-Bedingung . . . . .	131
2.3. Fehlerabschätzungen . . . . .	135
2.4. Konvergenzsätze für monotone Funktionen . . . . .	138
2.5. Fehlerabschätzungen für monotone Funktionen . . . . .	143
§ 3. Iterative Berechnung der Quadratwurzel . . . . .	146
§ 4. Überführung auf eine iterierfähige Form . . . . .	151
§ 5. Konvergenzbeschleunigung . . . . .	156
§ 6. Das NEWTONSche Verfahren . . . . .	159
6.1. Die Iterationsvorschriften des NEWTONSchen Verfahrens . . . . .	159
6.2. Das vereinfachte NEWTONSche Verfahren . . . . .	160
6.3. Das gewöhnliche NEWTONSche Verfahren . . . . .	163
6.4. Konvergenzgrad . . . . .	167
6.5. Beispiele . . . . .	169
§ 7. Das Verfahren von NEWTON-HORNER . . . . .	171
7.1. Das HORNER-Schema . . . . .	172
7.2. Rechenkontrollen beim HORNER-Schema . . . . .	175
7.3. Das vollständige HORNER-Schema . . . . .	178
7.4. Das Verfahren von NEWTON-HORNER . . . . .	181
§ 8. Allgemeinere Iterationen . . . . .	183

## KAPITEL III

**Metrische Räume und Verfahren  
zur Lösung linearer Gleichungssysteme**

§ 1. Metrischer Raum. . . . .	190
1.1. Definition des metrischen Raumes . . . . .	190
1.2. Beispiele von metrischen Räumen . . . . .	191
1.3. Der Konvergenzbegriff im metrischen Raum. . . . .	193
1.4. Vollständige metrische Räume . . . . .	196
§ 2. Operatoren in metrischen Räumen . . . . .	197
2.1. Begriff des Operators . . . . .	197
2.2. Selbstabbildung . . . . .	199
2.3. Kontraktionsoperator. . . . .	199
2.4. Fixpunkt eines Operators . . . . .	201
§ 3. Fixpunktsatz . . . . .	202
3.1. Beweis des Fixpunktsatzes . . . . .	202
3.2. Folgerungen aus dem Fixpunktsatz. . . . .	204
§ 4. Das Gesamtschrittverfahren bei linearen Gleichungssystemen . . . . .	205
4.1. Beschreibung der Iterationsprozesses . . . . .	205
4.2. Konvergenzkriterien . . . . .	206
4.3. Fehlerabschätzungen . . . . .	207
4.4. Organisation der numerischen Rechnung . . . . .	211
4.5. Numerisches Beispiel . . . . .	214
§ 5. Monotone Iterationen. . . . .	216
5.1. Monotone Iterationsfolgen. . . . .	216
5.2. Wahl des Anfangsvektors . . . . .	217
5.3. Fehlerabschätzung . . . . .	219
5.4. Numerisches Beispiel . . . . .	219
5.5. Einschließung der Lösung. . . . .	221
5.6. Verallgemeinerung der Aussagen . . . . .	222
§ 6. Das Einzelschrittverfahren . . . . .	224
6.1. Beschreibung des Iterationsprozesses . . . . .	224
6.2. Konvergenzkriterien . . . . .	225
6.3. Fehlerabschätzungen . . . . .	230
6.4. Numerisches Beispiel . . . . .	235
6.5. Die GAUSSsche Transformation. . . . .	236
6.6. Monotone Iterationen. . . . .	237
§ 7. Iterative Inversion von Matrizen. . . . .	240
7.1. Das Gesamtschrittverfahren . . . . .	240
7.2. Das Einzelschrittverfahren . . . . .	243
§ 8. Eliminationsverfahren . . . . .	246
8.1. Das Vorgehen bei den Eliminationsverfahren . . . . .	246
8.2. Darstellung der Eliminationsverfahren in Matrizenform . . . . .	251
8.3. Inversion von Matrizen . . . . .	254
8.4. Das Verfahren von GAUSS-BANACHIEWICZ . . . . .	254
8.5. Vergleich von Eliminations- und Iterationsverfahren . . . . .	261

## KAPITEL IV

**Lineare Räume und lineare Operatoren.  
Iterative Matrizeninversion**

§ 1. Lineare und lineäre normierte Räume . . . . .	264
1.1. Der Gruppenbegriff . . . . .	265
1.2. Der Begriff des Ringes . . . . .	269
1.3. Lineare Räume . . . . .	271
1.4. Lineare normierte Räume . . . . .	272
§ 2. Lineare Operatoren und Operatorenräume . . . . .	281
2.1. Einfache Eigenschaften von Operatoren . . . . .	281
2.2. Lineare Operatorenräume . . . . .	286
2.3. Normierte Operatorenräume . . . . .	291
2.4. Normierte Ringe . . . . .	295
§ 3. Ergänzungen zur Theorie linear konvergenter Iterationsverfahren . . . . .	297
3.1. Iterative Bestimmung des Fixpunktes . . . . .	297
3.2. Gesamtschrittverfahren . . . . .	298
3.3. Monotone absolute Normen . . . . .	299
3.4. Einzelschrittverfahren . . . . .	300
3.5. Interpretation des Einzelschrittverfahrens als Gesamtschrittverfahren . . . . .	303
§ 4. Quadratisch konvergentes Gesamtschrittverfahren zur Matrizeninversion . . . . .	305
4.1. Beschreibung des Iterationsprozesses . . . . .	305
4.2. Konvergenzkriterium . . . . .	306
4.3. Fehlerabschätzungen . . . . .	307
4.4. Organisation der numerischen Rechnung . . . . .	310
4.5. Numerisches Beispiel . . . . .	311
4.6. Monotone Iterationen . . . . .	313
4.7. Bemerkungen zur Anwendung des Iterationsverfahrens . . . . .	313
§ 5. Quadratisch konvergentes Einzelschrittverfahren zur Matrizeninversion . . . . .	314
5.1. Beschreibung des Iterationsprozesses . . . . .	314
5.2. Konvergenz des Einzelschrittverfahrens . . . . .	315
5.3. Fehlerabschätzungen . . . . .	317
5.4. Numerisches Beispiel . . . . .	320

## KAPITEL V

**Verbesserung der numerischen Genauigkeit  
von Eliminationsverfahren durch Pivotwahl**

§ 1. Das Austauschverfahren . . . . .	324
1.1. Herleitung der Transformationsgleichungen . . . . .	324
1.2. Numerisches Beispiel . . . . .	327
1.3. Rechenkontrolle . . . . .	328
1.4. Einführung einer Kellerzeile . . . . .	329
§ 2. Das Verfahren von GAUSS-JORDAN-RUTISHAUSER zur Inversion von Matrizen . . . . .	330
2.1. Beschreibung des Verfahrens . . . . .	330
2.2. Numerisches Beispiel . . . . .	331
2.3. Wahl des Pivotelementes . . . . .	332
2.4. Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	333
2.5. Ausnahmefälle . . . . .	333

§ 3. Das Verfahren von GAUSS . . . . .	336
3.1. Beschreibung des Verfahrens . . . . .	336
3.2. Numerisches Beispiel . . . . .	337
3.3. Inversion von Matrizen . . . . .	338
3.4. Das Verfahren von GAUSS-JORDAN . . . . .	339
§ 4. Vergleich der Eliminationsverfahren . . . . .	340

## KAPITEL VI

**Berücksichtigung von Blockstrukturen  
beim Lösungsprozeß**

§ 1. Die Formel von FROBENIUS-SCHUR . . . . .	347
1.1. Herleitung der Strukturbeziehung . . . . .	347
1.2. Organisation des Rechnungsganges . . . . .	349
1.3. Beispiel . . . . .	350
1.4. Anwendungsmöglichkeiten . . . . .	351
§ 2. Die Methode des Ränderns . . . . .	358
2.1. Herleitung des Inversionsalgorithmus . . . . .	358
2.2. Numerische Beispiele . . . . .	361
2.3. Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	362
§ 3. Durchführung der Eliminationsverfahren bei Zugrundelegung von Blockstrukturen . . . . .	364
3.1. Das Verfahren von GAUSS bei Blockstruktur . . . . .	364
3.2. Zahlenbeispiel . . . . .	365
3.3. Vor- und Nachteile des Vorgehens . . . . .	368
3.4. Spezielle Strukturen . . . . .	369
§ 4. Durchführung der Iterationsverfahren bei Zugrundelegung von Blockstrukturen . . . . .	371
4.1. Die linear konvergenten Iterationsverfahren bei Blockstruktur . . . . .	371
4.2. Die quadratisch konvergenten Iterationsverfahren zur Matrizeninversion bei Blockstruktur . . . . .	373
4.3. Spezielle Strukturen . . . . .	374
§ 5. Das Iterationsverfahren von HERTWIG . . . . .	377
5.1. Das HERTWIGSche Verfahren . . . . .	377
5.2. Beispiel . . . . .	379

## KAPITEL VII

**Berücksichtigung spezieller Eigenschaften  
beim Lösungsprozeß**

§ 1. Symmetrische Probleme . . . . .	381
1.1. Das GAUSSSche Verfahren zur Lösung symmetrischer Gleichungssysteme . . . . .	381
1.2. Das Verfahren von GAUSS-JORDAN zur Lösung symmetrischer Gleichungssysteme . . . . .	384
1.3. Das Verfahren von GAUSS-BANACHIEWICZ bei symmetrischen Gleichungssystemen . . . . .	385
1.4. Inversion symmetrischer Matrizen . . . . .	386
1.5. Pivotwahl bei symmetrischen Systemen . . . . .	389
1.6. Iterationsverfahren bei symmetrischen Problemen . . . . .	395
§ 2. Symmetrische streng positiv definite Probleme . . . . .	398
2.1. Kriterium für die positive Definitheit . . . . .	398
2.2. Die Lösungsverfahren bei streng positiv definiten Problemen . . . . .	398

§ 3. LEONTIEFSche Matrizen . . . . .	400
3.1. Begriff der LEONTIEFSchen Matrix . . . . .	400
3.2. Lösung linearer Gleichungssysteme mit LEONTIEFScher Koeffizientenmatrix . . . . .	402
3.3. Inversion LEONTIEFScher Matrizen . . . . .	402
3.4. Die NEUMANNsche Reihe . . . . .	404
3.5. Die Methode von FRAZER-DUNCAN-COLLAR . . . . .	406
§ 4. Überwiegende Hauptdiagonale und nahezu Dreieckstruktur . . . . .	406
4.1. Matrizen mit überwiegender Hauptdiagonale . . . . .	406
4.2. Bemerkungen zur Pivotwahl bei Problemen mit überwiegender Hauptdiagonale . . . . .	407
4.3. Probleme mit nahezu Dreiecksstruktur . . . . .	409
4.4. LEONTIEFSche Probleme mit nahezu Dreiecksstruktur . . . . .	410
§ 5. Iteration mit Elimination . . . . .	412
5.1. Beschreibung des Verfahrens . . . . .	412
5.2. Beispiel . . . . .	414

## KAPITEL VIII

## Nachträgliche Änderungen

§ 1. Problemstellung . . . . .	416
1.1. Praktische Aufgabenstellung . . . . .	416
1.2. Mathematische Beschreibung der Änderungsproblematik . . . . .	419
1.3. Änderung der rechten Seite linearer Gleichungssysteme . . . . .	420
1.4. Erklärung von Grundaufgaben . . . . .	421
§ 2. Änderungsformeln . . . . .	424
2.1. Die allgemeine Änderungsformel . . . . .	424
2.2. Änderung um eine Dyade . . . . .	425
2.3. Änderung eines Elementes . . . . .	428
2.4. Änderung einer Zeile und Spalte . . . . .	428
2.5. Änderung von zwei Elementen . . . . .	429
§ 3. Die Methode der Änderung eines Elementes . . . . .	430
3.1. Numerischer Algorithmus der Methode . . . . .	430
3.2. Rechenschema . . . . .	431
3.3. Zahlenbeispiel . . . . .	432
3.4. Wiederholte Anwendung der Methode der Änderung eines Elementes . . . . .	433
3.5. Bemerkungen zur Stabilität des Verfahrens . . . . .	436
3.6. Künstliche Änderungen . . . . .	437
3.7. Änderung eines Elementes der Koeffizientenmatrix linearer Gleichungssysteme . . . . .	438
§ 4. Die Methode der Änderung einer Zeile oder Spalte . . . . .	441
4.1. Numerischer Algorithmus der Methode der Änderung einer Spalte . . . . .	441
4.2. Rechenschema und Beispiel . . . . .	442
4.3. Beurteilung der Methode . . . . .	443
4.4. Die Methode der Änderung einer Zeile . . . . .	444
4.5. Lösung von Inversionsaufgaben spezieller Struktur . . . . .	445
4.6. Verwendung der Änderungsmethoden als allgemeine Inversionsverfahren . . . . .	446
4.7. Änderung einer Koeffizientenzeile . . . . .	447
4.8. Änderung einer Koeffizientenspalte . . . . .	449
4.9. Änderung mehrerer Koeffizientenzeilen . . . . .	451
4.10. Änderung von zwei Koeffizientenspalten . . . . .	454
4.11. Änderung einer Koeffizientenzeile und -spalte . . . . .	455

§ 5. Symmetrische Änderung symmetrischer Matrizen . . . . .	457
5.1. Der Lösungsalgorithmus bei der symmetrischen Änderung von zwei Elementen . . . . .	457
5.2. Rechenschema und Beispiel . . . . .	459
5.3. Der Lösungsalgorithmus bei der symmetrischen Änderung einer Zeile und Spalte . . . . .	461

## KAPITEL IX

**Fehlerhafte Eingangsinformationen und fehlerhafter Prozeß  
der numerischen Datenverarbeitung**

§ 1. Der Informationsverlust im Prozeß der numerischen Datenverarbeitung . . . . .	465
1.1. Ursachen für die Fehlerhaftigkeit des Datenverarbeitungsprozesses . . . . .	465
1.2. Abschätzung des Informationsverlustes im linearen normierten Raum . . . . .	468
1.3. Anwendung auf das Inversionsproblem . . . . .	469
1.4. Anwendung auf lineare Gleichungssysteme . . . . .	472
§ 2. Abschätzungen für die Norm der Inversen . . . . .	474
2.1. Abschätzungen mit Hilfe des quadratisch konvergenten Gesamtschrittverfahrens . . . . .	474
2.2. Abschätzungen mit Hilfe des quadratisch konvergenten Einzelschrittverfahrens . . . . .	475
2.3. Beispiel . . . . .	477
2.4. Abschätzungen für LEONTIEFSche Matrizen . . . . .	478
2.5. Vorgehen bei Verwendung eines Eliminationsverfahrens . . . . .	480
§ 3. Fehlerhafte Eingangsinformationen . . . . .	481
3.1. Problemstellung . . . . .	481
3.2. Abschätzung im linearen normierten Raum . . . . .	483
3.3. Anwendung auf das Inversionsproblem . . . . .	484
3.4. Bestimmung des zulässigen Fehlers der Eingangsinformationen . . . . .	486
3.5. Anwendung auf lineare Gleichungssysteme . . . . .	488
§ 4. Fehlerhaftigkeit der Eingangsinformationen und des Prozesses der numerischen Datenverarbeitung . . . . .	490
4.1. Problemstellung . . . . .	490
4.2. Abschätzung im linearen normierten Raum . . . . .	491
4.3. Anwendung auf das Inversionsproblem . . . . .	492
4.4. Anwendung auf lineare Gleichungssysteme . . . . .	493
§ 5. Iterative Erfassung fehlerhafter Eingangsinformationen . . . . .	494
5.1. Verwendung des Gesamtschrittverfahrens . . . . .	494
5.2. Verwendung des Einzelschrittverfahrens . . . . .	497
Literaturverzeichnis . . . . .	498
Sachverzeichnis . . . . .	501