

Inhaltsverzeichnis

1.	Zahlenrechnen, Fehler, Genauigkeit	13
1.1.	Grundbegriffe	13
1.2.	Fehlerfortpflanzung bei den Grundrechenoperationen	18
1.2.1.	Fehlerfortpflanzung bei Operationen 1. Stufe	18
1.2.2.	Fehlerfortpflanzung bei Operationen 2. Stufe	20
1.2.3.	Fehlerfortpflanzung bei Operationen 3. Stufe	22
1.3.	Fehlerfortpflanzung bei beliebigen Funktionen	24
2.	Rechenanordnungen und Rechenschemata	26
2.1.	Überblick	26
2.1.1.	Vorbemerkungen	26
2.1.2.	Verschiedene Arten von Rechenanordnungen	26
2.1.3.	Planung und Schematisierung von Rechnungen	27
2.1.4.	Zergliederung von Formeln	31
2.2.	HORNER-Schema	33
2.2.1.	Partialdivision	33
2.2.1.1.	Partialdivision mit linearem Divisor	33
2.2.1.2.	Partialdivision mit einem Divisor höheren Grades	38
2.2.2.	Berechnung von Funktionswerten	41
2.2.2.1.	Funktionswerte ganzzahliger Funktionen	41
2.2.2.2.	Funktionswerte und Grenzwerte gebrochenrationaler Funktionen	45
2.2.3.	Lineartransformation; vollständiges HORNER-Schema	47
2.2.4.	Berechnung der Werte der Ableitungen ganzzahliger Funktionen	51
2.2.5.	NEWTONSche Form eines Polynoms	53
2.3.	Differenzen-Schema	56
2.3.1.	Definitionen	56
2.3.2.	Differenzen-Schema	58
2.3.3.	Abhängigkeiten im Differenzenschema	61
2.3.4.	Additivität und Homogenität der Differenzenbildung	63
2.3.5.	Differenzen von Polynomen	64
2.4.	Dividierte Differenzen	69
2.4.1.	Definitionen, Symmetriebeziehungen	69
2.4.2.	Schema der dividierten Differenzen	72
2.4.3.	Abhängigkeiten im Schema der dividierten Differenzen	73
2.4.4.	Additivität und Homogenität	74
2.4.5.	Dividierte Differenzen und Ableitungen	74
2.4.6.	Dividierte Differenzen von Polynomen	75

3.	Graphische Darstellungen und Hilfsmittel (Grundbegriffe)	80
3.1.	Skalen	80
3.1.1.	Reguläre Skalen	81
3.1.2.	Funktionskalen	84
3.2.	Doppelskalen	86
3.2.1.	Feste Doppelskalen	86
3.2.2.	Verschiebbare Doppelskalen	88
3.3.	Rechenstäbe	88
3.3.1.	Beschreibung der wichtigsten Skalen auf Rechenstäben	89
3.3.2.	Beschreibung der verschiedenen Systeme	94
3.3.3.	Rechenstab als System fester Skalen	94
3.3.4.	Rechenstab als System verschiebbarer Skalen	96
3.3.4.1.	Grundoperation	96
3.3.4.2.	Operationsketten	98
3.3.4.3.	Erfassen von Funktionen	99
3.4.	Funktionskurven in Koordinatensystemen	100
3.4.1.	Zusammenhang zwischen Funktionsgleichung, Skalenteilungen u. Kurvenform	100
3.4.2.	Maßstabsfragen beim Differenzieren und Integrieren	102
4.	Rechengерäte	104
4.1.	Überblick	104
4.1.1.	Historischer Überblick	104
4.1.2.	Überblick über die heute gebräuchlichen Rechengерäte	105
4.2.	Tischrechenmaschinen	106
4.2.1.	Überblick über die gebräuchlichsten Arten und Typen	107
4.2.2.	Bedienungselemente der Maschine	107
4.2.3.	Zahlendarstellung	108
4.2.4.	Grundoperationen	108
4.2.4.1.	Addition und Subtraktion	108
4.2.4.2.	Multiplikation	109
4.2.4.3.	Skalarprodukte	110
4.2.4.4.	Division	110
4.3.	Digitale Rechenautomaten	111
4.3.1.	Grundbegriffe	111
4.3.2.	Grundaufbau eines digitalen Rechenautomaten	112
4.3.3.	Gesichtspunkte bei der Klassifizierung von Rechenautomaten	113
4.3.3.1.	Einteilung nach Schaltelementen	113
4.3.3.2.	Einteilung nach der Art der Programmierung	113
4.3.3.3.	Einteilung nach Befehlsadressen	114
4.3.3.4.	Einteilung nach der logischen Struktur der Informationsverarbeitung	114
4.3.3.5.	Einteilung nach Fest- und Gleitkomma	114
4.3.3.6.	Einteilung nach fester und variabler Wortlänge	115
4.3.3.7.	Einteilung nach Speicherart und -kapazität	115
4.4.	Rechenvorbereitung und Wahl der Hilfsmittel	116
4.4.1.	Allgemeine Vorbereitung	116
4.4.1.1.	Problemformulierung	116
4.4.1.2.	Mathematische Modellierung	116
4.4.2.	Wahl des Hilfsmittels	116
4.4.3.	Vom gewählten Hilfsmittel beeinflusste Vorbereitung	117
4.4.3.1.	Wahl eines geeigneten Lösungsverfahrens	117
4.4.3.2.	Schematisierung des geplanten Rechenablaufs	118
4.4.4.	Für das Hilfsmittel spezifische Vorbereitung	118

5.	Tafeln	120
5.1.	Grundbegriffe	120
5.1.1.	Argumentbereich und Unterteilung einer Tafel	120
5.1.2.	Tafelanordnungen	121
5.1.3.	Genauigkeit und Stellenzahl	124
5.1.4.	Gleichbleibende Stellen	124
5.1.5.	Einige allgemeine Bemerkungen	125
5.2.	Tafelablesen als mathematische Operation	125
5.2.1.	Einfaches Tafelablesen	125
5.2.2.	Verkettetes Tafelablesen	128
5.3.	Interpolation in Tafeln	129
5.3.1.	Problemstellung	129
5.3.2.	Lineare Interpolation	129
5.3.3.	Nichtlineare Interpolation	131
5.3.3.1.	Direkte nichtlineare Interpolation	131
5.3.3.2.	Inverse nichtlineare Interpolation	133
5.3.3.3.	Nichtlineare Interpolation über einen Parameter	134
6.	Näherungsformeln	135
6.1.	Grundbegriffe	135
6.1.1.	Näherungsfunktionen und Näherungsformeln	135
6.1.2.	Aufstellen von Näherungsformeln	136
6.1.3.	Abweichung der TAYLOR-Approximation	139
6.1.4.	Approximationspolynom und Potenzreihe	141
6.2.	Zusammenstellung einiger Standard-Näherungsformeln	142
6.3.	Herleitung weiterer Näherungsformeln	144
6.3.1.	Herleitung weiterer Näherungsformeln durch Ersetzung	144
6.3.2.	Herleitung weiterer Näherungsformeln durch Kombination	145
6.3.3.	Herleitung weiterer Näherungsformeln durch Differentiation und Integration	146
6.4.	Anwendung der Näherungsformeln	148
6.4.1.	Allgemeine Hinweise	148
6.4.2.	Spezielle Anwendungsbeispiele	149
6.4.2.1.	Wurzelberechnung	149
6.4.2.2.	Näherungsweise Lösen gewisser quadratischer Gleichungen	151
7.	Beliebige Gleichungen mit einer Unbekannten	154
7.1.	Vorbemerkungen	154
7.2.	Nullstellenverfahren	155
7.3.	Schnittstellenverfahren	157
7.4.	Interpolationsverfahren	162
7.4.1.	Lineares Interpolationsverfahren	162
7.4.2.	Bilineares Interpolationsverfahren	164
7.4.3.	Quadratisches Interpolationsverfahren	166
7.4.4.	Ein Beispiel	167
7.5.	Schmiegunungsverfahren	169
7.5.1.	Lineares Schmiegunungsverfahren	170
7.5.2.	Quadratisches Schmiegunungsverfahren	173
7.5.3.	Ein Beispiel	174
7.6.	Iteration	175
7.6.1.	Prinzip und Konvergenz des Iterationsverfahrens	175
7.6.2.	Konvergenzverbesserung	183
7.7.	Iteration und TAYLOR-Entwicklung	185
7.8.	Zur Behandlung komplexer Lösungen	187

8.	Algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten	189
8.1.	Theoretische Grundlagen	189
8.2.	Anwendung allgemeiner Verfahren zur Berechnung reeller Lösungen algebraischer Gleichungen	192
8.2.1.	Eingrenzung des Bereichs reeller Lösungen	192
8.2.2.	NEWTONSches Schmiegeungsverfahren	193
8.2.3.	Iteration	195
8.3.	Spezielle Verfahren für Gleichungen 4. Grades	197
8.3.1.	Benutzung einer kubischen Resolvente	198
8.3.2.	Aufspalten durch Eingabeln	201
8.3.3.	Aufspalten durch Iteration oder nach NEWTON	202
8.4.	Spezielle Verfahren für algebraische Gleichungen beliebigen Grades	202
8.4.1.	Verfahren zur Abtrennung eines quadratischen Lösungstrinoms	203
8.4.1.1.	Prinzip des Verfahrens	203
8.4.1.2.	Benutzung vollständiger Gleichungen für p und q	206
8.4.1.3.	Wiederholte Partialdivision mit Linearisierung	209
8.4.1.4.	Eine Abwandlung des zweizeiligen HORNER-Schemas	211
8.4.2.	Verfahren von BERNOULLI	213
9.	Lineare Gleichungssysteme	216
9.1.	Begriffe und Darstellungsmöglichkeiten	216
9.2.	Austauschverfahren	219
9.3.	Lösbarkeit von Gleichungssystemen	225
9.4.	Auflösung von Gleichungssystemen	232
9.4.1.	Inverse Matrix	232
9.4.2.	Verfahren von JORDAN	234
9.4.3.	GAUSSscher Algorithmus	236
9.4.4.	Verketteter Algorithmus	241
9.4.5.	Iteration	244
10.	Nichtlineare Gleichungssysteme	247
10.1.	Allgemeines und Spezialfälle	247
10.2.	Aufsuchen einer ersten Näherung	251
10.3.	Verbesserung einer ersten Näherung	255
10.3.1.	Iterationsverfahren	255
10.3.2.	Berechnung von Korrekturen	258
10.3.3.	Lösung mit Hilfe der TAYLOR-Entwicklung	260
11.	Interpolationsfunktionen	264
11.1.	Grundbegriffe	264
11.1.1.	Problemstellung	264
11.1.2.	Struktur der Interpolationsfunktion	265
11.1.3.	Bestimmungsgleichungen für die Parameter	267
11.2.	Interpolation durch Polynome bei beliebiger Stützstellenverteilung	268
11.2.1.	Direkter Polynomansatz	268
11.2.2.	NEWTONSche Interpolation	270
11.2.3.	LAGRANGESche Interpolation	275
11.2.4.	ATKENSche Interpolation	277
11.2.5.	Fehlerbetrachtungen	277
11.3.	Interpolation durch Polynome für äquidistante Stützstellen	279
11.3.1.	Vorbemerkungen und Hilfsformeln	279
11.3.2.	Grundformeln von GREGORY-NEWTON und GAUSS	279

11.3.3.	Kombinierte Formeln	283
11.4.	Goniometrische Interpolation für äquidistante Stützstellen	286
11.4.1.	Grundbegriffe und Problemstellung	286
11.4.2.	Einige Summenformeln	287
11.4.3.	Formeln für die Berechnung der Koeffizienten	288
11.4.4.	RUNGE-Faltung	289
11.4.5.	Berücksichtigung von Symmetrie-Eigenschaften Tafeln 11.1 bis 11.4	292 294
12.	Approximationsfunktionen	310
12.1.	Approximation als verallgemeinerte Interpolation	310
12.1.1.	Ausgleich von Meßfehlern	310
12.1.2.	Ersatzfunktionen	313
12.1.3.	Approximationsprinzipien	317
12.1.4.	Struktur der Approximationsfunktion	318
12.2.	Mittlere quadratische Approximation: Theoretische Grundlagen und allgemeine Formeln	320
12.2.1.	Skalarprodukt zweier Funktionen	320
12.2.2.	Skalarprodukt und GAUSSsche Quadratabweichung	323
12.2.3.	Grundformeln der mittleren quadratischen Approximation	324
12.2.4.	Grundformeln der mittleren quadratischen Approximation bei linearer Struktur der Approximationsfunktion	328
12.2.5.	Mittlere quadratische Approximation über einer orthogonalen Basis	331
12.3.	Mittlere quadratische Approximation durch Polynome	332
12.3.1.	Grundformeln	333
12.3.2.	Approximationspolynome zu Wertetabellen	333
12.3.3.	Approximationspolynome zu kontinuierlich gegebenen Funktionen	336
12.4.	Mittlere quadratische Approximation durch goniometrische Funktionen	338
12.4.1.	Allgemeine Bemerkungen	338
12.4.2.	Goniometrische Approximationsfunktionen zu Wertetabellen mit gleichabständigen Stützstellen	339
12.4.3.	Goniometrische Approximationsfunktionen zu kontinuierlich gegebenen Funktionen	340
12.5.	Gleichmäßige Approximation (T -Approximation)	344
12.5.1.	Problemstellung und Beschränkung	344
12.5.2.	Einige Sätze und Hilfsmittel	346
12.5.2.1.	Fundamentalsatz der T -Approximation durch Polynome	346
12.5.2.2.	Theorem von TSCHEBYSCHEFF	347
12.5.2.3.	TSCHEBYSCHEFF-Polynome	347
12.5.3.	Einige Verfahren zur Ermittlung und Verbesserung von Näherungen für Minimallösungen	350
12.5.3.1.	Ermittlung einer Näherung mit Hilfe der TAYLOR-Entwicklung	351
12.5.3.2.	Ermittlung einer Näherung durch Interpolation	353
12.5.3.3.	Transformation und goniometrische Interpolation	354
12.5.3.4.	Ansatz für Alternanten	354
13.	Fehler- und Ausgleichsrechnung	356
13.1.	Fehler	356
13.1.1.	Fehlerursachen und Fehlerarten	356
13.1.2.	Fehler bei direkter und indirekter Einzelmessung	357
13.1.3.	Meßreihe	359
13.1.4.	Mittlerer Fehler der Einzelwerte einer Meßreihe	360

13.1.5	Mittlerer Fehler des Mittelwertes einer Meßreihe	362
13.1.6.	Fehlerfortpflanzung bei Meßreihen	363
13.1.7.	Einige wesentliche Folgerungen	365
13.1.8.	Wahrscheinlicher Fehler	367
13.2.	Ausgleichung	368
13.2.1.	Vorbetrachtungen	368
13.2.2.	Ausgleichung von Messungen ungleicher Genauigkeit	369
13.2.3.	Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen	372
13.2.3.1.	Ausgleichung durch eine lineare Funktion	372
13.2.3.2.	Ausgleichung durch eine ganzrationale Funktion	377
13.2.3.3.	Lineare Ausgleichung bei mehreren Variablen	378
13.2.3.4.	Ausgleichung durch eine beliebige Funktion	379
13.2.4.	Ausgleichung bedingter Beobachtungen	384
13.2.4.1.	Eine Nebenbedingung	384
13.2.4.2.	Mehrere Nebenbedingungen	385
14.	Integration und Differentiation	391
14.1.	Vorbemerkungen zur Integration	391
14.2.	Mittelwertformeln: Theoretische Grundlagen und allgemeine Formeln	392
14.2.1.	Bemerkungen zur Herleitung der Mittelwertformeln.	392
14.2.2.	Normierung des Integrationsintervalles	393
14.2.3.	Herleitung der Formeln für Näherungswerte	394
14.2.4.	Ein Beispiel	397
14.2.5.	Fehlerbetrachtungen	398
14.2.6.	Stützstellenverteilungen	400
14.3.	Spezielle Mittelwertformeln I: Stützstellen im Inneren und am Rande des Integrationsintervalles	401
14.3.1.	Überblick über die Prinzipien der Stützstellenverteilung	401
14.3.2.	Herleitung einiger Standardformeln mit gleichabständigen Stützstellen	402
14.3.3.	Ein Beispiel	407
14.3.4.	Mehrfachanwendung von Standardformeln	410
14.3.4.1.	Mehrfachanwendung der NEWTON-KOTESSchen Formel mit drei Stützstellen	410
14.3.4.2.	Mehrfachanwendung der MACLAURINSchen Formel mit drei Stützstellen	413
14.3.5.	Fehlerbetrachtungen	416
14.4.	Spezielle Mittelwertformeln II: Stützstellen auch außerhalb des Integrationsintervalles	418
14.4.1.	Vorbemerkungen und Überblick	418
14.4.2.	Herleitung und Zusammenstellung der Formeln	419
14.5.	Verwendung von Ableitungen	422
14.5.1.	Verallgemeinerung der Mittelwertformeln durch Verwendung von Ableitungen des Integranden	422
14.5.2.	Herleitung der Formeln für Näherungswerte	422
14.5.3.	Aufstellen einiger Formeln	424
14.6.	Numerische Differentiation	426
14.6.1.	Vorbemerkungen und Überblick	426
14.6.2.	Herleitung der Näherungsformeln	427
14.6.3.	Einige Standardformeln für die numerische Differentiation in Wertetabellen mit äquidistanten Stützstellen	429
	Literaturverzeichnis	433
	Sachwortverzeichnis	435